§3 二阶线性微分方程

一、二阶线性微分方程

一般形式： $$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$$

当 $f(x)=0$ 时，二阶齐次线性微分方程；

当 $f(x)\neq 0$ 时，二阶非齐次线性微分方程。

n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

二阶线性微分方程解的结构:

1、二阶齐次线性微分方程解的结构:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

定理1:

若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程的解,

则它们的线性组合 $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$

也是该二阶齐次线性微分方程的解。

问题: $y = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$　α、β为常数,

是否一定是通解?

定理2:

若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

在 I 上的两个线性无关的解,

则: $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$　C_1、C_2 为常数

是该二阶齐次线性微分方程的通解。

如　$y''+y=0$,　$y_1=\cos x$　$y_2=\sin x$

$$\frac{y_2}{y_1}=\tan x \neq \text{常数}$$

$\therefore GS.$　$y=C_1\cos x+C_2\sin x$

2、二阶非齐次线性微分方程解的结构:

y

定理: 非齐次线性微分方程的通解等于该方程的一个特解加上相应的齐次线性微分方程的通解

y^*

$\overline{y}$

证明: 设 $$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$$

$$y=\overline{y}+y^*$$

$$\because \frac{d^2\overline{y}}{dx^2}+p(x)\frac{d\overline{y}}{dx}+q(x)\overline{y}=0$$

$$\frac{d^2y^*}{dx^2}+p(x)\frac{dy^*}{dx}+q(x)y^*=f(x)$$

两式相加得

$$\frac{d^2(\bar{y}+y^*)}{dx^2}+p(x)\frac{d(\bar{y}+y^*)}{dx}+q(x)(\bar{y}+y^*)=f(x)$$

$\therefore\ \bar{y}+y^*$ 为非齐次线性微分方程的解，

又 $\because\ \bar{y}$ 是相应齐次线性微分方程的通解，

包含两个任意常数，

$\therefore\ \bar{y}+y^*$ 中也包含两个任意常数，

$\therefore\ \bar{y}+y^*$ 为非齐次线性微分方程的通解。

解的叠加原理：

若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别是下列线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f_1(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f_2(x)$$

的解，

则 $y_1(x)+y_2(x)$ 是线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$ 的解。

二、二阶常系数齐次线性微分方程

定义：

n 阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数。

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = 0 \quad p, q \text{ 为常数；}$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad p, q \text{ 为常数。}$$

二阶常系数齐次线性微分方程解法

——————特征方程法

$$y'' + py' + qy = 0$$

设 $y = e^{\lambda x}$，将其代入上方程，得

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0, \quad \because e^{\lambda x} > 0,$$

$$\therefore \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

为二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程。

特征方程法与原微分方程比较：

1) 若 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 有两个不同的实根，

记为 λ_1 & λ_2，

$\therefore$ 原微分方程的两个特解：

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x},\quad y_2(x)=e^{\lambda_2 x},$$

$$\because \lambda_1 \neq \lambda_2,\quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\neq \text{常数}$$

则原微分方程的通解：$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

2) 若 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 有两个相同的实根，

记为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-\dfrac{p}{2}$，

得到一个特解 $y_1(x)=e^{\lambda x}$，

须找一个与 $y_1(x)$ 线性无关的特解，设为 $y_2(x)$，

即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$ 常数，设 $y_2(x)=u(x)e^{\lambda x}$，

代入原微分方程 $y''+py'+qy=0$，并简化

$$[u''(x)+\underline{(2\lambda+p)}u'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}u(x)]e^{\lambda x}=0$$

$\Rightarrow u''=0$，取 $u(x)=x$，$\Rightarrow y_2(x)=xe^{\lambda x}$，

则原微分方程的通解：$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$.

3) 若 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 有一对共轭复根 $\alpha \pm \beta i$，

即 $\lambda_1 = \alpha + \beta i$，$\lambda_2 = \alpha - \beta i$，

∴原微分方程的两个特解：

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x}$，$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x}$，

显然 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，

通解为：$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$，

复数形式，涉及复数运算，

重新组合，变为实数形式。

由解的线性性得：

$$\frac{1}{2}[e^{(\alpha+\beta i)x}+e^{(\alpha-\beta i)x}]=\frac{1}{2}[e^{\alpha x}(e^{\beta xi}+e^{-\beta xi})]$$

$$=\frac{1}{2}\{e^{\alpha x}[\cos\beta x+i\sin\beta x+\cos(-\beta x)+i\sin(-\beta x)]$$

$$=e^{\alpha x}\cos\beta x$$ 也是原微分方程的特解;

同理 $$\frac{1}{2i}[e^{(\alpha+\beta i)x}-e^{(\alpha-\beta i)x}]$$

$$=\frac{1}{2i}\{e^{\alpha x}[\cos\beta x+i\sin\beta x-\cos(-\beta x)-i\sin(-\beta x)]$$

$$=e^{\alpha x}\sin\beta x$$ 也是原微分方程的特解;

且 $e^{\alpha x}\cos\beta x / e^{\alpha x}\sin\beta x \neq$ 常数,

则原微分方程的通解:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

特征方程法 由常系数齐次线性微分方程的特征方程的根确定其通解的方法。

例1、求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ 通解。

例2、求 $y''-6y'+9y=0$ 通解。

例3、求 $y''+4y=0$ 满足 $y(0)=0$ $y'(0)=1$ 特解。

n 阶常系数齐次线性微分方程解法

标准形式

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数,

其特征方程为

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

它在复数范围内恰 n 有个根。

同样有:

1) 若λ 是实的单重根，

则 $e^{\lambda x}$ 是微分方程的解；

2) 若λ 是实的 k 重根，

则 $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ 是微分方程的 k 个线性无关的解；

3) 若 $\alpha \pm \beta i$ 是单重共轭复根，

则$e^{\alpha x}\cos\beta x$和 $e^{\alpha x}\sin\beta x$是微分方程的解。

4) 若 $\alpha \pm \beta i$ 是 k 重共轭复根，

$$
\text{则}\quad \left.\begin{array}{ll}
e^{\alpha x}\cos\beta x, & e^{\alpha x}\sin\beta x, \\
xe^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, \\
\vdots & \\
x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, & x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,
\end{array}\right\}
$$

是微分方程的 $2k$ 个线性无关的解，

$\therefore$ n 阶常系数齐次线性微分方程的通解

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

例4、求 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 通解。

思考题：求 $yy''-\left(y'\right)^{2}=y^{2}\ln y$ 通解。

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

标准形式　$y'' + py' + qy = f(x)$

由解的结构定理

非齐次的特解

非齐次的通解　$y = \underline{\bar{y}} + y^*$

齐次的通解

常数变易法求特解

例5、求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{x}e^x$ 通解。

由于非齐次的一个特解与非齐次线性微分方程中的 $f(x)$ 的形式有着重要的关系，如多项式、指数函数，正弦及余弦函数求若干次导数后不改变函数的形式。

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1、 $f(x) = u_n(x)e^{\lambda^* x}$ 型

对应齐次方程： $y'' + py' + qy = 0$

通解结构： $y = \overline{y} + y^*$

特征根?

常见类型： $u_n(x)$ $u_n(x)e^{\lambda^* x}$

n次多项式

方法： 待定系数法

设非齐方程特解为 $y^* = v(x)e^{\lambda^* x}$，代入原方程得

$$v''(x) + \underline{(2\lambda^* + p)}v'(x) + \underline{(\lambda^{*2} + p\lambda^* + q)}v(x) = u_n(x)$$

1) 若 λ^* 不是特征方程的根，即 $\lambda^{*2} + p\lambda^* + q \neq 0$，

$v(x)$ 必是 n 次多项式，记 $v(x) = v_n(x)$，

可设 $y^* = v_n(x)e^{\lambda^* x}$；

2) 若 λ^* 是特征方程的单根，

即 $\lambda^{*2} + p\lambda^* + q = 0$，但 $2\lambda^* + p \neq 0$，

$v'(x)$ 必是 n 次多项式，记 $v(x) = xv_n(x)$，

可设 $y^* = xv_n(x)e^{\lambda^* x}$；

$$v''(x)+(\underline{2\lambda^*+p})v'(x)+(\underline{\lambda^{*2}+p\lambda^*+q})v(x)=u_n(x)$$

3) 若 λ^* 是特征方程的二重根，

即 $\lambda^{*2}+p\lambda^*+q=0$，且 $2\lambda^*+p=0$，

$v''(x)$ 必是 n 次多项式，记 $v(x)=x^2v_n(x)$，

可设 $y^*=x^2v_n(x)e^{\lambda^*x}$；

综上讨论： $y''+py'+qy=f(x)$， $f(x)=u_n(x)e^{\lambda^*x}$，

可设 $y^*=x^mv_n(x)e^{\lambda^*x}$

n次多项式

$$m=\begin{cases}0 & \lambda^*\text{不是根}\\ 1 & \lambda^*\text{是单根}\\ 2 & \lambda^*\text{是重根}\end{cases}$$

代入原方程用待定系数法求得特解。

例6、求 $y''' - 5y'' + 6y' = x^3 - 2x + 1$ 通解。

例7、求 $y'' + 2y' - 3y = (3 - 4x)e^x$ 通解。

2、$f(x)=u_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ or $u_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 型 $(\beta\neq 0)$

n 次多项式

设非齐方程特解为

$$y^*=x^m e^{\alpha x}[v_n(x)\cos\beta x+\tilde{v}_n(x)\sin\beta x]$$

1) 若 $\alpha\pm\beta i$ 不是特征方程的根时， $m=0$,

2) 若 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的单根时， $m=1$.

例8、求 $y'' + y = x\sin 3x$ 通解。

求 $y'' + y = x\sin 3x + 2\cos x$ 通解。

例9、设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足

$$\varphi(x)=e^{x}+\int_{0}^{x} t\varphi(t)dt - x\int_{0}^{x}\varphi(t)dt，求 \varphi(x).$$

例10、验证函数 $y(x)=1+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{6}}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$

满足微分方程 $y''+y'+y=e^{x} \quad x\in(-\infty,+\infty)$

利用此结果求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数。