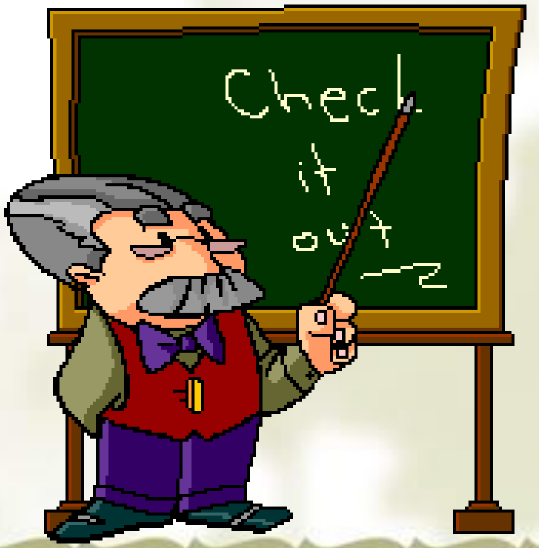
§2 数列的极限

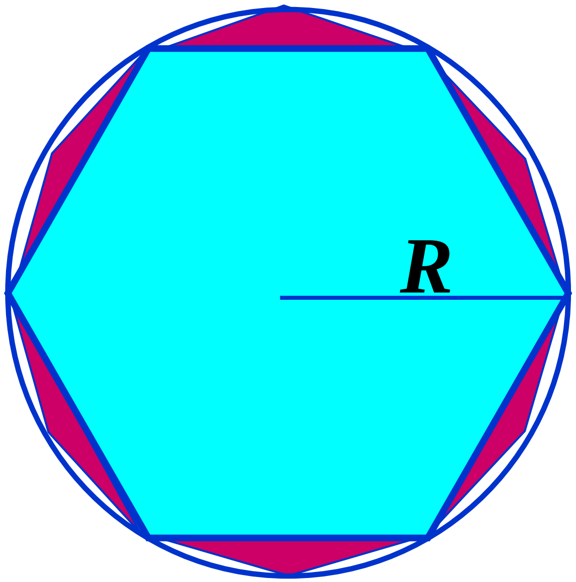
高等数学中极限是一个重要的概念。因为高等数学中的一些重要概念如：微分、积分、级数等，都是以极限为理论基础的。



一、数列的概念

1、概念的引入

圆内接正多边形



正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

······· ·······

正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积 A_n

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

$$\{A_n\} \to A \, (n \to \infty)$$

2、定义： 按照某一法则得

第一个数 x_1

第二个数 x_2

……

第 n 个数 x_n $\quad n \in N^+$

依次排列着，这列有序的数：

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\cdots$ 称为数列。

记为 $\{x_n\}$

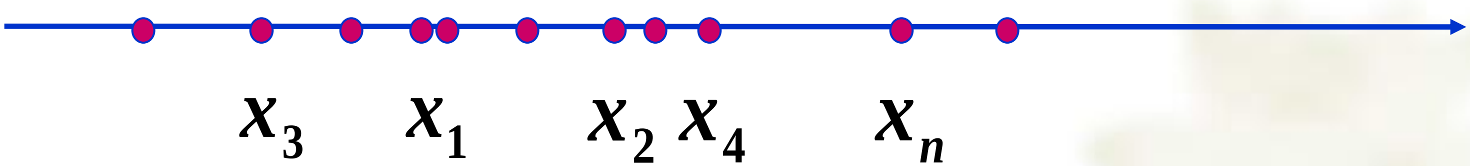
其中每个数称为数列的项，

x_n 称为数列的通项(或一般项).

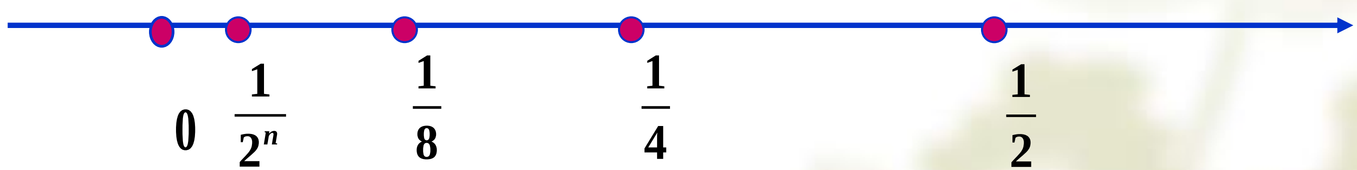
例如： $\{\frac{1}{2^n}\}$： $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;$

$\left\{\frac{1+(-1)^n 2}{n}\right\}$： $-1,\frac{3}{2},-\frac{1}{3},\quad\cdots\quad\frac{1+(-1)^n 2}{n},\quad\cdots\cdots$

注意：在几何上，数列可看作数轴上的一个动点。



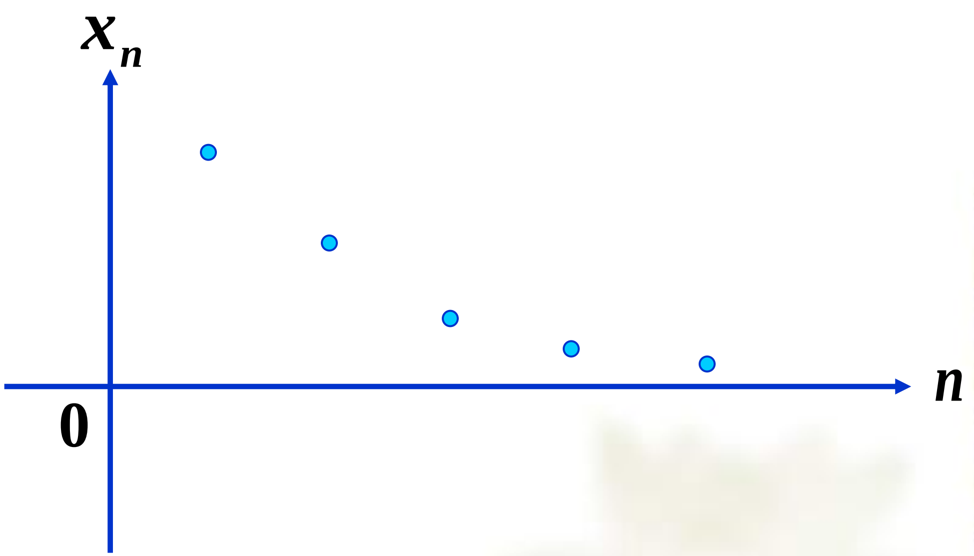
$\{\frac{1}{2^n}\}$：



$\left\{\frac{1+(-1)^n 2}{n}\right\}$：

$\{x_n\}$ 也可看作直角坐标系上：$\{(n, x_n) \mid n = 1, 2, \cdots\}$

$\{\frac{1}{2^n}\}$：



$\left\{\frac{1+(-1)^n 2}{n}\right\}$：

需要讨论的是：

当n无限增大时，$(n \to +\infty)$，

对应的 $x_n = f(n)$ 是否能无限接近于某个确定的数值，如果是，如何确定?

通过上面演示实验的观察：

当n无限增大时，

$$x_n = \frac{1}{2^n} \text{ 无限接近于} 0\text{；}$$

$$x_n = \frac{1+(-1)^n 2}{n} \text{ 无限接近于} 0\text{.}$$

就上例而言：

$$\because \left|x_n - 0\right| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n}$$

给定 $\frac{1}{100}$ 由 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$ 只要 $n > \frac{2}{\lg 2}$ 时，有 $\left|x_n - 0\right| < \frac{1}{100}$

给定 $\frac{1}{1000}$ 只要 $n > \frac{3}{\lg 2}$ 时，有 $\left|x_n - 0\right| < \frac{1}{1000}$

给定 $\frac{1}{10000}$ 只要 $n > \frac{4}{\lg 2}$ 时，有 $\left|x_n - 0\right| < \frac{1}{10000}$

1、定义:

如果对于任意给定的正数 ε（无论多么小），

总存在正整数N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，

不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 都成立，

那么就称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，

或称为数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad or \quad x_n \to A(n\to\infty)$

如果数列没有极限，则是发散的。

"$\varepsilon - N$" 定义：

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \ni$ 当 $n > N$ 时，

恒有 $|x_n - A| < \varepsilon$

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} x_n = A$

注意：1）"正数 ε 可以任意给定"；

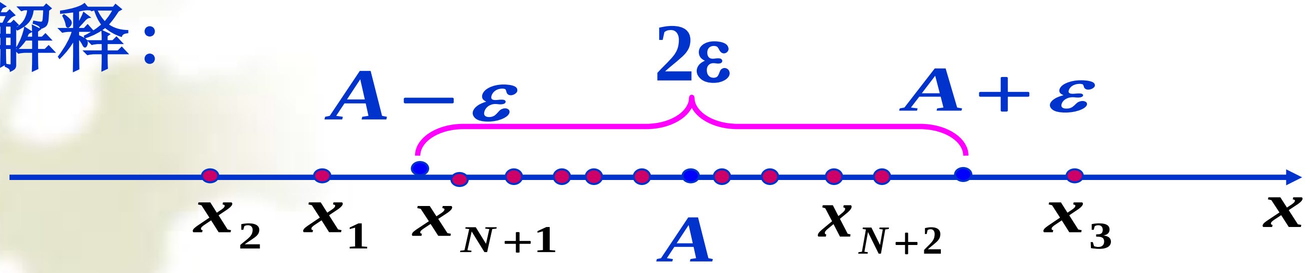
2）正整数 N 与任意给定的正数 ε 有关；

3）$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow x_n = A + \varepsilon_n \quad n \in N^+.$

当 n 充分大时，$\{\varepsilon_n\} \to 0$

返回

几何解释:



极限运算已经不是有限运算了，它叩开了无穷运算的大门，我们即将迈入无穷的王国，将有许多瑰丽的景色期待着我们。

例1. 证明: 数列 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$

例2. 设$a>1$, 验证:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

“放大处理”基本思想：

利用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 时，由不等式性质，作出如此放大处理：

$|x_n - A| < y_n < \varepsilon$ 从而可以从 $y_n < \varepsilon$ 中，寻求正整数 N ，由放大后的部分能小于预先给定的 ε ，则原来的部分更满足，从而得到证明。

三、无穷小量与无穷大量

（一）无穷小量

定义：设有数列 $\{\varepsilon_n\}$，如果对任何正数 $\eta > 0$，

都存在正整数N ，使得 $n > N$ 时，

有 $|\varepsilon_n| < \eta$

则称 $n \to \infty$ 时，$\{\varepsilon_n\}$ 是无穷小量 。

记为：$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

注意：

（二）无穷小量的运算性质

1）同一过程中，无穷小量的代数和是无穷小量。

证明：设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是当$n\to\infty$时的两个无穷小量，

即：$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1>0\ N_2>0$ 使得

当$n>N_1$时，恒有 $|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$；

当$n>N_2$时，恒有 $|b_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$；

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，当$n>N$ 时，恒有

$$|a_n\pm b_n|\le|a_n|+|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$ 即证

注意：

1）有限多个无穷小量的代数和是无穷小量；

无穷多个无穷小量的代数和是如何呢？

2）有界量与无穷小量的乘积是无穷小量；

3）两个无穷小量的乘积是无穷小量；

（可推广到有限多个）

思考：

1）证明，当$x\to\infty$时，函数$\dfrac{[x]}{x}$不是无穷小量。

2）两个无穷小量之比将会出现什么情况？

（三）无穷大量

定义：设有数列$\{a_n\}$，如果对任意的数 $k>0$，都存在正整数 N ，使得 $n>N$ 时，有 $|a_n|>k$

则称 $n\to\infty$ 时 $\{a_n\}$ 是无穷大量。

（四）无穷小量与无穷大量的关系

定理: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\,(a_n \neq 0) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \infty$

证明: "$\Rightarrow$" 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$， 且 $a_n \neq 0$

$\therefore \forall k > 0, \exists N$，使得$n > N$时，恒有$|a_n| < \dfrac{1}{k}$

$\because a_n \neq 0 \;\therefore \left|\dfrac{1}{a_n}\right| > k \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \infty$

"$\Leftarrow$" $\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\,(a_n \neq 0) \;\therefore \forall k > 0, \exists N$,

使得$n > N$时，恒有 $|a_n| > k \quad \because a_n \neq 0$

$\therefore \left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \dfrac{1}{k} \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0\,(a_n \neq 0)$

四. 数列极限的求法

1、收敛数列的性质

1）数列极限的常用运算性质

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = AB$

当$B\neq 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$

例3、当$a>0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

（作为结论）

推论：$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^m = A^m$

$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$ $m > 0$ 为有限值

当 $|q| < 1$ 时，$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

结论：当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$k$为非负整数时有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & k = m \\ 0 & k > m \\ \infty & k < m \end{cases}$$

例4、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+n-2}{4n^4-7n^3+2n}$

例5、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7(-5)^n+3\cdot 7^n}{4^n+3\cdot 7^n+8}$

例6、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\arctan n}{4n^2+3n+5}$

例7、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1+2}{n^3}+\cdots+\dfrac{1+2+\cdots n}{n^3}\right)$

2）有界性

定义：对数列 $\{x_n\}$，若存在正数 M，

使得一切自然数 n，恒有 $|x_n| \le M$ 成立，

则称数列 x_n 有界，否则，称为无界。

例如：数列 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ 有界；

数列 $x_n = 2^n$ 无界。

3）定理：收敛数列必有界。

证明：如果数列$\{x_n\}$收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

由定义，对$\forall\varepsilon$，则$\exists N$，使得当$n > N$时，

恒有$|x_n - A| < \varepsilon$，即 $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$

取 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$

$\therefore$对一切正整数n，皆有$|x_n| \le M$

即 $\{x_n\}$ 有界。

4）夹逼性定理 设有数列$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$，

如果自某项以后均有$a_n \le b_n \le c_n$，且

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

证明：设对一切正整数n，均有$a_n \le b_n \le c_n$

$\because$数列的极限与该数列前有限项无关，

$\therefore$给定$\forall \varepsilon > 0$，

取正整数N_1，使$n > N_1$时，$|a_n - A| < \varepsilon$

取正整数N_2，使$n > N_2$时，$|c_n - A| < \varepsilon$

记 $N = \max(N_1, N_2)$ 当$n > N$时，

$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$ 即 $\underline{A-\varepsilon} < a_n < A+\varepsilon$

$-\varepsilon < c_n - A < \varepsilon$ 即 $A-\varepsilon < c_n < \underline{A+\varepsilon}$

$\therefore \quad A-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A+\varepsilon$

即 $A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon$ 即 $|b_n - A| < \varepsilon$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

例8、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ （作为结论）

例9、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4+1}+\frac{8}{n^4+8}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^3}\right)$

例10、计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

思考题：

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^3+2^3+\cdots+n^3}$

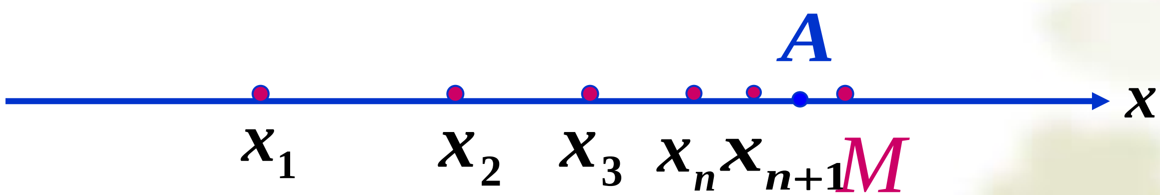
2、单调有界数列

单调数列

单调增加数列：$\{x_n\}$，$x_n \le x_{n+1}$ $n \ge 1$

单调减少数列：$\{x_n\}$，$x_n \ge x_{n+1}$ $n \ge 1$

定理　单调有界数列必有极限。



有界数列的点 x_n 都落在数轴上某一区间 $[-M, M]$.

例11、证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的存在。

证明：先证单调性　由二项式定理

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$\therefore\ x_n<x_{n+1}\quad n=1,2,\cdots$　即$\{x_n\}$单调增加；

再证明$\{x_n\}$有界性

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \quad (\frac{a}{1-q}) = 3$$

即$\{x_n\}$有界；

$\because$单调有界数列必有极限

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

例12、设数列 $\{a_n\}: a_1 > 0, \cdots, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}\quad n = 1, 2, \cdots$

证明该数列$\{a_n\}$收敛，并求出其极限。

注意:

思考题:

设 $\{a_n\}: a_1 > 0, \cdots, a_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + \frac{81}{a_n^3})\quad n = 1, 2, \cdots$

证明该数列$\{a_n\}$收敛，并求出其极限。

3.Cauchy 收敛准则（对于一般数列）

数列$\{x_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists 正整数 N, \ni n, m > N 时 \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

证明:“$\Rightarrow$”(必要性)

$\because \{x_n\}$收敛 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

即$\forall \varepsilon > 0 \therefore \dfrac{\varepsilon}{2} > 0 \ \ \exists N$,当$n > N$时，有$|x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

同样,当$m > N$时，也有$|x_m - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\therefore$当$m > N, n > N$时,有

$$|x_n - x_m| = |(x_n - A) - (x_m - A)|$$

$$\le |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

“$\Leftarrow$” 略 $\because$涉及实数系的连续性等

例13、设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 证明其发散。

证明：要证明 $\{x_n\}$ 发散

即证 $\{x_n\}$ 不满足*Cauchy* 收敛准则的条件

即 $\exists$某个$\varepsilon > 0$, 对$\forall$正整数N,

$$\exists n, m \geq N, \ni |x_n - x_m| \geq \varepsilon$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 对$\forall$正整数$N$,

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

$$\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

所以 $\{x_n\}$ 是发散的。