§6 线性方程组

解线性方程组常用的三个方法：

1）*Crammer* 法则；

2）消元法；

3）利用矩阵的秩讨论线性方程组的解的情况。

秩是求解线性方程组的核心概念！

一、利用矩阵的秩讨论线性方程组

设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$

即：$A_{n\times m}X_{m\times 1} = B_{n\times 1}$

我们已介绍过消元法解线性方程组实质是，用行初等变换化线性方程组的增广矩阵为阶梯形矩阵，因为行等价的矩阵对应的线性方程组是同解的线性方程组。

阶梯矩阵为：
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1m} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2m} & d_2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rm} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1）若 $d_{r+1} \neq 0$，意味着 $r(A) \neq r(\bar{A})$

则方程组无解；

2）若 $d_{r+1}=0$，且 $r(A)=m$．即 $r(A)=r(\bar{A})=m$

方程组未知个数

$$\bar{A}\xrightarrow{\text{若干初等行变换}}\text{阶梯形矩阵}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&d_1'\\0&1&\cdots&0&d_2'\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\cdots&1&d_m'\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

再经有限次的初等行变换 $\longrightarrow$

则方程组有唯一解

$$\begin{cases}x_1&=&d_1'\\x_2&=&d_2'\\\vdots&&\\x_m&=&d_m'\end{cases}$$

写成矩阵形式 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1'\\d_2'\\\vdots\\d_m'\end{pmatrix}$

3）若 $d_{r+1}=0$，且 $r(A)<m$． 即 $r(A)=r(\bar{A})<m$

方程组未知个数

$$\bar{A}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{经有限次的}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c'_{1r+1} & \cdots & c'_{1m} & d'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c'_{2r+1} & \cdots & c'_{2m} & d'_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c'_{rr+1} & \cdots & c'_{rm} & d'_m \\ 0 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & & \cdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

有 r 个独立未知量，r 个独立方程，

m-r 个自由未知量。

则此方程组有无穷多组解。

对应的线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + \qquad\qquad\qquad c'_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{1m}x_m = d'_1 \\
\qquad x_2 + \qquad\qquad c'_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{2m}x_m = d'_2 \\
\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad x_r + c'_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{rm}x_m = d'_r
\end{cases}
$$

移项后得:

$$
\begin{cases}
x_1 = -c'_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - c'_{1m}x_m + d'_1 \\
x_2 = -c'_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - c'_{2m}x_m + d'_2 \\
\quad\vdots \\
x_r = \underbrace{-c'_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - c'_{rm}x_m}_{\text{自由未知量的个数 } m-r(A) \text{ 个}} + d'_r
\end{cases}
$$

若令 $x_{r+1} = k_1,\ x_{r+2} = k_2,\ \cdots,\ x_m = k_{m-r}$

得：

$$
\begin{cases}
x_1 = -c'_{1r+1}k_1 - \cdots - c'_{1m}k_{m-r} + d'_1 \\
x_2 = -c'_{2r+1}k_1 - \cdots - c'_{2m}k_{m-r} + d'_2 \\
\quad\vdots \\
x_r = -c'_{rr+1}k_1 - \cdots - c'_{rm}k_{m-r} + d'_r \\
x_{r+1} = k_1 \\
x_{r+2} = k_2 \\
\quad\vdots \\
x_m = k_{m-r}
\end{cases}
$$

$k_1, k_2, \cdots, k_{m-r}$ 为任意常数。

定理：

对一般的m 元非齐次线性方程组 $A_{n\times m}X_{m\times 1}=B_{n\times 1}$

1）当$r(A)<r(\bar{A})$时， 方程组无解；

2）当$r(A)=r(\bar{A})=m$（未知量个数）时，方程组有唯一解；

3）当$r(A)=r(\bar{A})<m$（未知量个数）时，方程组有无穷多组解。

相应的齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$

即： $A_{n\times m}X_{m\times 1}=0$

总是有解的，$x_1=x_2=\cdots=x_m=0\,(X=0)$

所以，齐次线性方程组只有两种情况

1）当 $r(A)=r=m$（未知量个数）时，

方程组有唯一零解；

2）当 $r(A)=r<m$（未知量个数）时，

方程组有无穷多组非零解。

此时，齐次线性方程组有 r 个独立未知量，r 个独立方程，m-r 个自由未知量。

定理：

对一般的m元齐次线性方程组 $A_{n\times m}X_{m\times 1}=0$

方程组有非零解$\Leftrightarrow$ $r(A)=r<m$ （未知量个数）

方程组只有零解$\Leftrightarrow$ $r(A)=r=m$ （未知量个数）

推论1

如果齐次线性方程组 $AX=0$ 的方程个数$n<m$

则方程组必有非零解。 未知量个数

推论2

n个方程n个未知量的齐次线性方程组

有非零解$\Leftrightarrow$ $|A|=0$， 只有零解$\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

二、线性方程组解的结构

（一）先讨论齐次线性方程组

$AX=0$ 的解具有以下性质：

性质1 如果 $x^{(1)}, x^{(2)} \in R^m$ 是 $AX=0$ 的两个解向量，则 $x^{(1)}+x^{(2)}$ 也是 $AX=0$ 的解。

性质2 如果 $x^{(j)} \in R^m$ 是 $AX=0$ 解向量，λ 是数，则 $\lambda x^{(j)}$ 也是 $AX=0$ 的解。

齐次线性方程组的解的两个性质说明：

如果 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(p)} \in R^m$ 是 $AX=0$ 的解向量，则它们的线性组合 $\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\cdots+\lambda_p x^{(p)}$ 仍是 $AX=0$ 的解向量。$\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in R$

定义 若向量组 $\left\{x^{(j)}\right\}_{j=1}^{p}$ 满足

1）每个向量 $x^{(j)}$ 都是 $AX=0$ 的解，

2）向量组中所有向量线性无关，

3）$AX=0$ 的任意一个解都能够用 $\left\{x^{(j)}\right\}_{j=1}^{p}$ 线性表示

则称 $\left\{x^{(j)}\right\}_{j=1}^{p}$ 为该齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个**基础解系**，称 $\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x^{(j)}$（$\lambda_j$ 是任意常数）为该齐次线性方程组 $AX=0$ 的**通解**。

定理1 设 $A \in R^{n\times m}$ $r(A) = r < m$ 未知量个数

那么齐次线性方程组$AX = 0$ 的每个基础解系中

恰有m-r 个解 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m-r)}$ ，

而且该方程组的任意一个解x 都可以表示为

$$x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x^{(j)} \quad \lambda_j \ (j = 1, \cdots, m-r)\text{为常数。}$$

证：$\because AX = 0 \quad r(A) = r < m$ 则方程组必有非零解，

对系数矩阵A 施以有限次初等行变换化成标准形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2m-r} \\ \vdots & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{rm-r} \\ 0 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \tilde{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

标准形

其同解的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + & & & b_{11}x_{r+1} & + & \cdots & + & b_{1m-r}x_m & = & 0 \\ & x_2 + & & b_{21}x_{r+1} & + & \cdots & + & b_{2m-r}x_m & = & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & x_r + & b_{r1}x_{r+1} & + & \cdots & + & b_{rm-r}x_m & = & 0 \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, \cdots, x_m$ 是m-r 个自由未知量，取

$x_{r+1} = k_1$， $x_{r+2} = k_2, \cdots, x_m = k_{m-r}$ 得：

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}k_1 - \cdots - b_{1m-r}k_{m-r} \\ x_2 = -b_{21}k_1 - \cdots - b_{2m-r}k_{m-r} \\ \quad\vdots \\ x_r = -b_{r1}k_1 - \cdots - b_{rm-r}k_{m-r} \\ x_{r+1} = k_1 \\ x_{r+2} = k_2 \\ \quad\vdots \\ x_m = k_{m-r} \end{cases} \qquad (k_1, \cdots, k_{m-r} \in R)$$

写成向量的形式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{m-r} \begin{pmatrix} -b_{1m-r} \\ \vdots \\ -b_{rm-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

即

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad x^{(1)}=\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^{(2)}=\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \quad x^{(m-r)}=\begin{pmatrix} -b_{1m-r} \\ \vdots \\ -b_{rm-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\tilde{B} \\ I_{m-r} \end{pmatrix}$$

的列向量

所以，齐次线性方程组的通解为：

$$x=\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\cdots+\lambda_{m-r}x^{(m-r)} \quad (\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-r}\in R)$$

$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m-r)}$ 就是$AX=0$ 的一个基础解系。→ 满足定义的三条件

其解 $x=\sum_{j=1}^{m-r}\lambda_j x^{(j)}$

是$AX=0$ 的通解，包含了其全部解。

例1、求齐次线性方程组一个基础解系，并求其通解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 16x_5 = 0 \end{cases}$$

求齐次线性方程组 $A_{n\times m}X_{m\times 1}=0$ 的通解的方法：

1^0 先求解基础解系，在求其通解（一般解）

① 对方程组系数矩阵A 作初等行变换化为标准形矩阵

$\begin{pmatrix} I_r & \tilde{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 必要时交换列的位置，此时变量也要相应交换

当 $r<m$ 时，方程组有非零解；

当 $r=m$ 时，方程组只有零解。

②由标准形矩阵求出齐次线性方程组的一个基础解系

即 $\begin{pmatrix} -\tilde{B} \\ I_{m-r} \end{pmatrix}$ 的列向量；

③按齐次线性方程组解的结构写出其通解：

$$x=\sum_{j=1}^{m-r}\lambda_j x^{(j)}$$

2^0 先求一般解，再从中找出基础解系，

①对方程组系数矩阵A作初等行变换化为标准形矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & \tilde{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 必要时交换列的位置，此时变量也要相应交换

当 $r < m$ 时，方程组有非零解；

当 $r = m$ 时，方程组只有零解。

②由标准形矩阵直接写出方程组一般解（向量形式）

③从中找出其基础解系，写出其通解。

（二）非齐次线性方程组

$AX = B$ 的解具有以下性质：

性质3 如果 $x^{(1)}, x^{(2)}$ 是 $AX = B$ 的两个解，

则 $x^{(1)} - x^{(2)}$ 是其对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解

性质4 如果 x^{*} 是 $AX = B$ 的解，$x^{(j)}$ 对应 $AX = 0$ 的解，

则 $x^{(j)} + x^{*}$ 仍是 $AX = B$ 的解。

由性质3可知：如果 x^{*} 是 $AX = B$ 的解，

则当 $r < m$ 任一解 x 总可表示为

$$x = x^{*} + (x - x^{*}) = x^{*} + x^{(j)}$$

再由性质4可知：当 $x^{(j)}$ 取遍其 $AX = 0$ 的全部解（即通解）时，$x = x^{*} + x^{(j)}$

也就取遍了 $AX = B$ 的全部解（即通解）.

定理2 设 x_0 是 $AX=B$ 的一个解（特解）

当 $r(A)=r(\bar{A})=r<m$

对 $AX=B$ 有无穷多组解，对 $AX=0$ 有非零解，

$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m-r)}$ 是相应 $AX=0$ 的一个基础解系

则 $x=\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}+\cdots+\lambda_{m-r} x^{(m-r)}+x_0$

$$=\sum_{j=1}^{m-r}\lambda_j x^{(j)}+x_0$$ 是 $AX=B$ 的通解。

由定理2 及求齐次线性方程组的基础进解系和通解的方法，可得到求

$A_{nm}X_{m1}=B$ 的通解方法：

1^0

① 对方程组的 $\bar{A}$ 作初等行变换化为标准形矩阵

$$\left(\begin{array}{cc:c} I_r & \tilde{B} & \tilde{b} \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

必要时交换列的位置，此时变量也要相应交换

②由标准形矩阵求出方程组的特解 x_0 及对应齐次线性方程组的基础解系 $x^{(j)}$ ； 具体如下：

i ）如果标准形矩阵中 * 的元素不全为零，那么 $AX=B$ 无解

ii ）如果标准形矩阵中 * 的元素全为零，那么 $\begin{pmatrix} -\tilde{B} \\ I_{m-r} \end{pmatrix}$ 列向量为对应 $AX = 0$ 的基础解系，

$AX=B$ 的特解 $x_0 = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ 0_{m-r} \end{pmatrix}$

注：若有列交换时，相应的分量位置也要相应的交换。

③按 $AX = B$ 解的结构写出其通解：

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{m-r} \lambda_j x^{(j)}$$

2^0

① 对方程组的 $\bar{A}$ 作初等行变换化为标准形矩阵

$$\left(\begin{array}{cc:c} I_r & \tilde{B} & \tilde{b} \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

必要时交换列的位置，此时变量也要相应交换

i ）如果标准形矩阵中 $*$ 的元素不全为零，

那么$AX=B$ 无解

ii ）如果标准形矩阵中 $*$ 的元素全为零，

② 由标准形矩阵可直接写出对应的齐次线性方程组

的一般解（向量形式），从中找出其基础解系；

③ 由标准形矩阵求出特解，从而得其通解。

例2、求非齐次线性方程组一个基础解系，并求其通解。（两种方法）

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$$

例3、讨论非齐次线性方程组解的情况（$\lambda \neq 0$ ）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = \lambda \end{cases}$$

对含参数的线性方程组解讨论，可分情形处理：

1）方程个数等于未知量个数时，有两种求解方法：

解法一

解法二

2）方程个数不等于未知量个数，或系数矩阵A 不含参数，而常数项含参数，一般只能用初等行变换。