§2 一阶常微分方程

一阶常微分方程的一般形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其定解存在且唯一（有下面定理）。

定理（解的存在与唯一性定理）：

如果 $f(x,y)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在矩形区域

$\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b\}$ 上连续，

那么存在一个 $0<h\le a$，其定解在 $|x-x_0|<h$ 上

有唯一解 $y=\varphi(x)$，使得

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)),\quad \varphi(x_0)=y_0 .$$

常见类型的一阶常微分方程的解法

一、变量可分离方程

一般形式 $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$

即 $f(x, y) = g(x)h(y)$ x, y 完全分离。

解法：

1) 分离变量 $\dfrac{dy}{h(y)} = g(x)dx$， $h(y) \neq 0$，

2) 两边积分 $\displaystyle\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)dx$

此方程的通解(GS):

$H(y) = G(x) + C$． C：任意常数

奇解 $h(y) = 0$．

例1、求解常微分方程的定解问题:

$$\begin{cases} \sin x \dfrac{dy}{dx} = y \ln y \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e \end{cases}$$

例2、求微分方程的 $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dy}{dx} + a(y^2 + \dfrac{dy}{dx})$ 通解。

例3、求微分方程 $f(xy)ydx + g(xy)xdy = 0$ 的通解。

有限资源下单一群体自然增长模型（Logistic 模型）

群体增长的条件是复杂的，如细菌、物种、人口增长等。如人口增长：

如果在有限生存资源下，能够维持人口生存的最大总量（即饱和量）为 N_m，则相对净增长率为 $1-\dfrac{N}{N_m}$，

则人口相对增长速率正比于 $N\left(1-\dfrac{N}{N_m}\right)$，

这时，描述人口增长的方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}=kN\left(1-\dfrac{N}{N_m}\right) \\ N(t_0)=N_0 \end{cases}$$

$$\frac{dN}{dt}=kN\left(1-\frac{N}{N_m}\right)$$ 为可分离变量微分方程，

$$\frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{N_m}\right)}=kdt\,,\qquad \frac{N_m}{N(N_m-N)}dN=kdt\,,$$

两边同时积分得 $$\int\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N_m-N}\right)dN=k\int dt$$

$$\ln N-\ln(N_m-N)=kt+C\,,\qquad \frac{N}{N_m-N}=e^{kt+C}=Ce^{kt}\,,$$

$$\because N(t_0)=N_0\,,\quad C=\frac{N_0}{N_m-N_0}e^{-kt_0}\,,$$

有限资源下单一群体自然增长模型为： $$N(t)=\frac{N_m}{1+\left(\frac{N_m}{N_0}-1\right)e^{-k(t-t_0)}}$$

二、齐次方程

1、定义 若对于任何$\tau \neq 0$，有 $f(\tau x, \tau y) = \tau^k f(x, y)$，

则称函数$f(x, y)$为k次齐次函数，

此时的微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

称为 齐次微分方程。

齐次微分方程的一般形式：$\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2、解法 作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$，即 $y = xu$，

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

即 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\varphi(u)-u}{x}$

可分离变量的方程

当 $\varphi(u)-u\neq 0$ 时，$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$

解出方程后再用 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，即为原方程的通解。

注意　分离变量时，若 $\varphi(u)-u=0$ 时，

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=0 \quad \Rightarrow u=C$$

$\therefore$ 原方程的通解为 $y=Cx$.

若 $\varphi(u)-u=0$ 有根 $u=a$

$\Rightarrow y=ax$ 是原方程的一个解。

例4、 求解微分方程 $(x+y\cos\frac{y}{x})dx - x\cos\frac{y}{x}dy = 0$.

例5、 求解微分方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})ydx+(y-x)dy=0$.

结论

利用变量代换变为可分离变量的微分方程。

例6、 若曲线上任一点处的切线在 y 轴上的截距等同于同点处法线在x 轴上的截距,求该曲线的方程。

3、形如 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ （*）的微分方程，

1) 当 $c_1=c_2=0$ 时，即为 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的齐次方程；

2) 当 c_1,c_2 不全为零时，

① 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时， 作变换 $\begin{cases} x=X-\xi \\ y=Y-\eta \end{cases}$

代入(*) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y-(a_1\xi+b_1\eta-c_1)}{a_2X+b_2Y-(a_2\xi+b_2\eta-c_2)}$

从线性方程组 $\begin{cases} a_1\xi+b_1\eta=c_1 \\ a_2\xi+b_2\eta=c_2 \end{cases}$ 解出 ξ,η.

使(*)式变为形如 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的齐次方程,

即 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$

②若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 时，即两行对应成比例，

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}=\lambda$，也即 $a_2x+b_2y=\lambda(a_1x+b_1y)$，

i) 若 b_1, b_2 全为零，那原方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}$

为变量可分离方程;

ii）若 b_1, b_2 不全为零，可作变换 $u = a_1x + b_1y$，

不妨设 $b_1 \neq 0$， $\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = a_1 + b_1\dfrac{dy}{dx}$，

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{b_1}(\dfrac{du}{dx} - a_1)$，由（*）式

$$\Rightarrow \frac{1}{b_1}(\frac{du}{dx} - a_1) = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2} = \frac{u + c_1}{\lambda u + c_2}$$

即可化为可分离变量的方程 $\dfrac{du}{dx} = g(u)$，

此微分方程总可变为可分离变量的微分方程

且可推广到 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$.

例7、求通解 $(3x-2y+1)dx+(x-4y-3)dy=0$.

四、全微分方程

1、定义 若存在函数 $u(x, y)$,

使得 $du(x,y) = f(x,y)dx + g(x,y)dy$,

则称方程 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$

为 **全微分方程。**

其解 $u(x,y) = C$ $\quad (du(x,y) = 0)$

也称**直接凑全微分法。**

如 $xdx + ydy = 0$ $\quad \because u(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$,

$\therefore du(x,y) = xdx + ydy$ 全微分方程

其解 $x^2 + y^2 = C$.

2、定理 $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ 是某个函数的全微分

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

为判断是否是全微分方程的条件、方法。

如果是全微分方程，则可用

1）凑全微分公式的方法

2）积分因子的方法

3）第二类曲线积分的方法（不要求）

1）凑全微分公式法：

例8、 求微分方程通解

$$(e^x \sin y - mx)y' = e^x \cos y + my，\ m \text{ 是常数。}$$

解： $$\underbrace{(e^x \cos y + my)}_{f(x,y)}dx + \underbrace{(-e^x \sin y + mx)}_{g(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (e^x \cos y + my)}{\partial y} = -e^x \sin y + m$$

$$\|$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (-e^x \sin y + mx)}{\partial x} = -e^x \sin y + m$$

$\therefore$原方程为全微分方程；

$$(e^x \sin y - mx)y' = e^x \cos y + my$$

$$(e^x \sin y - mx)dy = (e^x \cos y + my)dx$$

$$e^x \cos y dx - e^x \sin y dy + my dx + mx dy = 0$$

$$d(e^x)\cos y + e^x d(\cos y) + m(y dx + x dy) = 0$$

$$d(e^x \cos y) + d(mxy) = 0$$

$$d(e^x \cos y + mxy) = 0$$

$$\therefore GS. \quad e^x \cos y + mxy = C\ .$$

2、积分因子法

当不满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ 时，

虽 $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ 不是全微分方程，

但如能找到一个函数 $\mu(x,y)$，

使得 $\mu(x,y)f(x,y)dx+\mu(x,y)g(x,y)dy=0$

为全微分方程，

即 $\mu(x,y)f(x,y)dx+\mu(x,y)g(x,y)dy=du(x,y)$，

从而求得其通解，此方法称为积分因子法，

$\mu(x,y)$ 称为积分因子。

问题：如何求方程的积分因子?

两种方法：

观察法：凭观察凑微分得到 $\mu(x, y)$，

一些常用二元函数的全微分公式：

1) $ydx + xdy = d(xy)$

2) $xdx + ydy = d\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2}\right)$

3) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\dfrac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\dfrac{x}{y}\right)$

4) $xy^2dx + x^2ydy = d\left(\dfrac{x^2y^2}{2}\right)$

5) $$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$

6) $$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

7) $$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right)$$

8) $$\frac{xdy + ydx}{xy} = d\left(\ln xy\right)$$

例9、求微分方程通解 $ydx - xdy + y^2 xdx = 0$.

例10、求微分方程通解

$$(2x\sqrt{x^2+y^2}+x)dx+(\sqrt{x^2+y^2}+y)dy=0.$$

五、一阶线性微分方程

一阶线性常微分方程的标准形式：

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$$

当 $g(x)=0$ 时，一阶齐次线性常微分方程；

当 $g(x)\neq 0$ 时，一阶非齐次线性常微分方程。

1) 当 $g(x)=0$ 时,

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=0$$ 显然变量可分离,

$$\frac{dy}{y}=-f(x)dx \qquad \int\frac{dy}{y}=-\int f(x)dx$$

$$\ln|y|=-\int f(x)dx+C' \qquad |y|=e^{-\int f(x)dx+C'}$$

一阶齐次线性常微分方程通解公式

GS. $y=Ce^{-\int f(x)dx}$ C：任意常数。

2）当 $g(x)\neq 0$ 时,

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x) \qquad \frac{dy}{y}=\frac{g(x)}{y}dx-f(x)dx$$

两边积分 $\ln|y|=\underbrace{\int \frac{g(x)}{y}dx}_{\parallel}-\int f(x)dx$

$$\ln|y|=\mu(x)-\int f(x)dx$$

$\therefore GS.\quad y=\underline{e^{\mu(x)}}\cdot e^{-\int f(x)dx}=C(x)e^{-\int f(x)dx}$

非齐次方程通解形式与齐次方程通解相比：

$C\Rightarrow C(x)$

常数变易法

把齐次线性方程通解中的任意常数变易为待定函数的方法。

确定函数 $C(x)$

将 $y=C(x)e^{-\int f(x)dx}$ 两边对 x 求导,

$$y'=C'(x)e^{-\int f(x)dx}+C(x)[-f(x)]e^{-\int f(x)dx}$$

将 y, y' 代入原微分方程,

由 $y' + f(x)y = g(x)$

即 $C'(x)e^{-\int f(x)dx} + C(x)[-f(x)]e^{-\int f(x)dx}$

$$+ f(x)\cdot C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

得 $C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}$

两边积分 $C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C$

$\therefore GS.\quad y = e^{-\int f(x)dx}[\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C]$

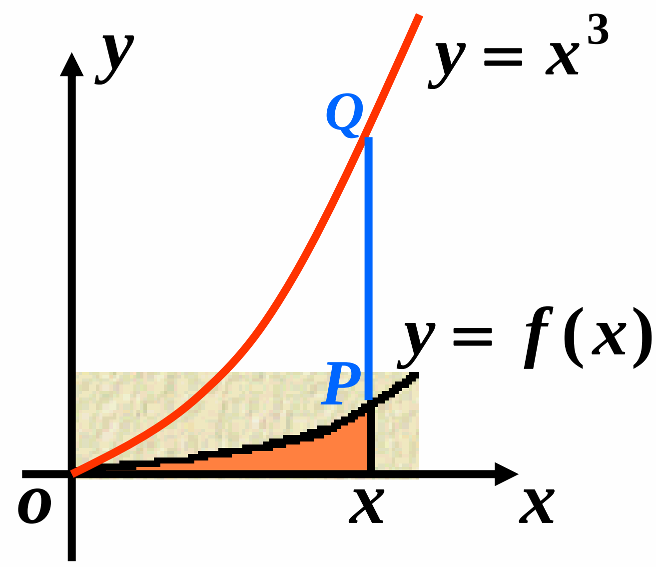
$$= \underline{Ce^{-\int f(x)dx}} + \underline{e^{-\int f(x)dx}\cdot\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx}$$

对应齐次
方程通解

非齐次方程特解

例11、求 $\dfrac{dy}{dx} - y\tan x = \sec x$， $y(0)=0$ 的特解 PS.

例12、 如图所示，平行与 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$与 $y=x^3$ $(x\ge 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积, 求曲线 $f(x)$.



Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)y^n$$ $n=0,1$ 时，为线性微分方程；

当 $n\neq 0,1$ 时， 方程两端除以 y^n，

$$\frac{1}{y^n}\cdot\frac{dy}{dx}+f(x)\frac{1}{y^{n-1}}=g(x)$$

令 $u=\dfrac{1}{y^{n-1}}$ $\quad \dfrac{du}{dx}=(1-n)\dfrac{1}{y^n}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore\frac{du}{dx}+(1-n)f(x)u=(1-n)g(x)$$

为关于 u 的一阶线性微分方程。

例13、求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通解。

例14、求 $y'=\dfrac{\cos y}{\cos y\sin 2y-x\sin y}$ 的通解。

例15、一曲边梯形的曲边方程为 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ 底边位于区间 $[0,x]$ 上，其面积与 $f(x)$ 的 $(n+1)$ 次幂成正比 $(n>0)$，又 $f(0)=0$，$f(1)=1$，求 $f(x)$.