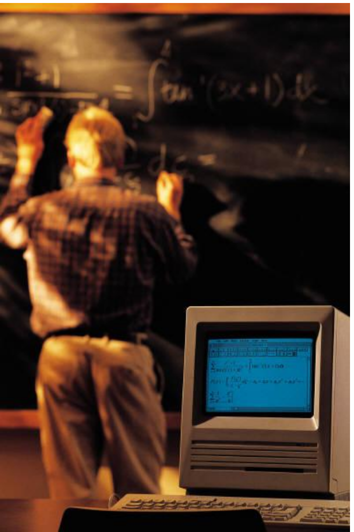
§2 求导运算

本节的中心问题是求各类函数的导数，即介绍基本初等函数的求导公式，函数的四则运算求导，复合函数的求导法则等。

$$\text{初等函数}\begin{cases}\text{基本初等函数} \longrightarrow \text{导数表}\\[2em] \text{构成法} \qquad\qquad \longrightarrow \text{求导法则}\end{cases}$$



一、几个初等函数的导数

用导数的定义求出一些基本初等函数的导函数

步骤:

1）求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

2）算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

3）求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

1、常数 $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

证：$\because \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{C - C}{\Delta x} = 0$

$\therefore f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$

2、幂函数 $f(x)=x^n, n\in N^+ \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

证：$\because f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n-x^n}{\Delta x}$$

$$=nx^{n-1}+\lim_{\Delta x\to 0}o(|\Delta x|)$$

$$=nx^{n-1}$$

3、指数函数 $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$

证：$\because f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=e^x\cdot 1 \quad (\because e^x-1\sim x)$$

$$=e^x$$

4、正弦函数 $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

证：$\because f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$=\cos x$$

二、四则运算的求导法则

定理： 设 f 和 g 均是可导函数，α, β 是常数，

则 $1.\ (\alpha f+\beta g)'=(\alpha f)'+(\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$

$2.\ (fg)' = f'g + fg'$

$3.\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2} \quad (g \neq 0)$

证：1、2 略

证：3　设 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]g(x)-f(x)\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}g(x)-f(x)\dfrac{\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

推论：

1. $$\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$$

2. $$[Cf(x)]' = Cf'(x)$$

3. $$\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} f_i'(x) f_k(x)$$

例1、$y=3e^{x}+x^{2}\sin x$ 求 y'

例2、求 $\dfrac{1}{x^{m}}$ 的导数，$m\in N^{+}$

三. 复合函数求导的链式法则

定理： （链式求导法则）

如果函数 φ 在 x_0 处可导，函数 f 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ $(f[\varphi(x)])$ 在 x_0 处可导，且 $(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)$

用微商记号 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

注意： 不要与导数的乘积混淆

证明：$\because y=f(u)$ 在点 u_0 可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0)$$

例3、指数函数 $f(x)=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$

解：$\because f(x)=a^x=e^{Ina^x}=e^{xIna}$

$\therefore$ 可视为函数 $f(u)=e^u$ 和 $u=g(x)=xIna$ 的复合

$$\therefore f'(x)=f'(u)g'(x)=e^u\cdot Ina$$

$$=e^{xIna}Ina=a^x Ina$$

即 $(a^x)'=a^x Ina$

例4、余弦函数 $(\cos x)'=-\sin x$

解：$\because \cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 设 $f(u)=\sin u$

$$\therefore(\cos x)'=f'(u)\cdot g'(x) \qquad u=g(x)=\frac{\pi}{2}-x$$

$$=\cos u\cdot(-1)$$

$$=-\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin x$$

由此可得到其它三角函数的求导公式

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

同理：$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$$(\sec x)' = \tan x \sec x$$

$$(\csc x)' = -\cot x \csc x$$

双曲正弦函数 $shx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

双曲余弦函数 $chx=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$$f(u)=\frac{u-u^{-1}}{2} \qquad u=g(x)=e^{x}$$

$$\therefore (shx)'=f'(u)g'(x)=\frac{1+u^{-2}}{2}e^{x}$$

$$=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=chx$$

同理：$(chx)'=shx$

注意： 复合函数求导公式还可推广到有限次的复合函数的求导法则。

设 $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$，

则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\cdots\cdots$$

四、反函数的求导法则

定理： 如果 f 是 (a, b) 上严格单调的连续函数，

$x_0 \in (a, b)$，f 在 x_0 上可导，且 $f'(x_0) \neq 0$，

则反函数 f^{-1} 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导，且

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{微商表示：} \quad \frac{dx}{dy} = 1 \Big/ \frac{dy}{dx}$$

证：记 $y = f(x)$，$\because y$ 是严格单调函数，

$$\therefore \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \neq 0$$

$\because f$ 是严格单调连续的，$\Rightarrow f^{-1}$ 是严格单调连续的，

当 $\Delta y \to 0$ 时，$\Delta x \to 0$

$$\therefore (f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

例5、对数函数 $f(x)=\log_a x$

证： $f^{-1}(y)=a^y=x$

$$\therefore (\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y Ina}=\frac{1}{xIna}$$

$$\therefore \quad (\log_a x)'=\frac{1}{xIna}$$

当 $a=e$ 时，有 $(Inx)'=\dfrac{1}{x}$

例6、任意幂 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ α 为任意实数

解： $(x^\alpha)'=(e^{Inx^\alpha})'=(e^{\alpha Inx})'$

$$=e^{\alpha Inx}\cdot(\alpha\cdot\frac{1}{x})=\alpha x^{\alpha-1}$$

例7、$y=\arcsin x \quad (-1<x<1)$

证：$\because (\arcsin x)'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$$

同理可得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$(arc\cot x)=-\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

以上基本初等函数的求导结果均为求导公式

例8、$y=\sqrt{1+x^2}$ 求 y' .

例9、设 $f(x)$ 可导，$y=x^2 f(x+e^{-2x})$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

例10、设 $y=f^{3}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)$，其中 $f(u)=\arctan u^{2}$，

求：$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

五、对数求导法

主要适用于：

1）形如 $y = u(x)^{v(x)}$（幂指函数）的求导；

2）求由三项或三项以上函数之积、商、乘方、或开方运算组成的函数的导数。

$$\frac{d}{dx}[u(x)^{v(x)}] = \frac{d}{dx}[e^{Inu(x)^{v(x)}}] = \frac{d}{dx}[e^{v(x)Inu(x)}]$$

$$= e^{v(x)Inu(x)}[v(x)Inu(x)]'$$

$$= u(x)^{v(x)}[v'(x)Inu(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)]$$

相当于 1）对等式两边取对数

2）两边对自变量 x 求导

3）结果以 x 形式表示

例11、$y = x^{\sin x}$ 求 y'

例12、求 $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x-2)^2(x+5)^3}{(4-x)^4}}$ 的导数

六、高阶导数

定义： 如果函数 $y = f(x)$ 导函数 f' 仍是可导函数，则可求出它的导函数 $(f')'$，称之为 f 的二阶导函数，记作 f''， y''， $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, or $\dfrac{d^2f}{dx^2}$

同理可推出 f 的 n 阶导函数

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

也可记为：

$$y^{(n)} \qquad f^{(n)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} \qquad \frac{d^n f}{dx^n}$$

例13、求 $y = lnx$ 的 n 阶导函数

解： $(Inx)' = \dfrac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^{0} \cdot 1 \cdot x^{-1}$

$$(Inx)'' = (x^{-1})' = -x^{-2} = (-1)^{1} \cdot 1 \cdot x^{-2}$$

$$(Inx)''' = (-x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

以此类推 $\vdots$

$$(Inx)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (n-1) \cdot x^{-n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^{n}}$$

由此可推出

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (Inx)^{(n+1)} = (-1)^{n} \frac{n!}{x^{n+1}}$$

定理：如果函数 f 和 g 都是 n 阶可导函数，

则 1）对 $\forall \alpha, \beta$（常数）

$\alpha f + \beta g$ 也是 n 阶可导，且

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

2）$(fg)' = f'g + fg'$

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

由数学归纳法得

Leibniz 公式 $\quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

其中 $f^{(0)} = f$，$g^{(o)} = g$

例14、求 $f(x)=\dfrac{1}{3-2x-x^2}$ 的 n 阶导函数

例15、$f(x)=x^2e^{3x}$ 求 $f^{(10)}$

综合练习

1、设 $y=e^{x}+2\log_{2}x$，求其反函数 $x=x(y)$ 的二阶导数。

2、$f(x)=(x-1)^{n}(x^{2}+5x+3)^{n}\cos\pi x$ 求 $f^{(n)}(1)$