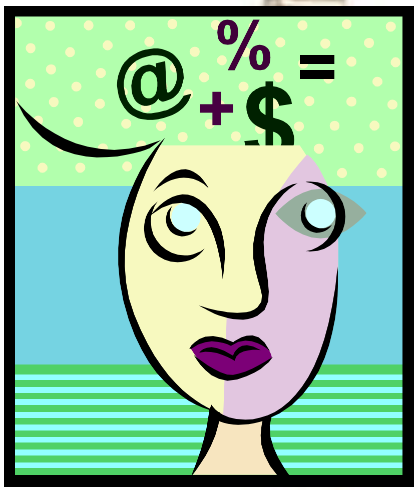
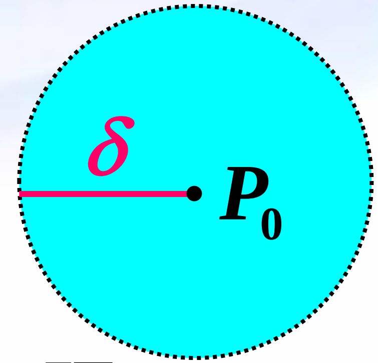
第七章 多元函数微分学

多元函数微分学是一元函数微分学的推广，两者有着相似之处，但也有本质的差异。应对照一元函数性质来学习多元函数的微分学。



§1 多元函数的极限与连续



一、点邻域、内点、开集、区域等概念

1、邻域的定义

设 $P_0(x_0, y_0) \in R^2$，存在$\delta > 0$，使得与点 P_0 距离小于δ的点 $P(x, y)$ 的全体，记为 $U(P_0, \delta)$，

即 $U(P_0,\delta) = \left\{P \,\middle|\, |\overrightarrow{P_0P}| < \delta\right\}$

$$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

称 $U(P_0,\delta)$ 为 点P_0的δ 邻域 .

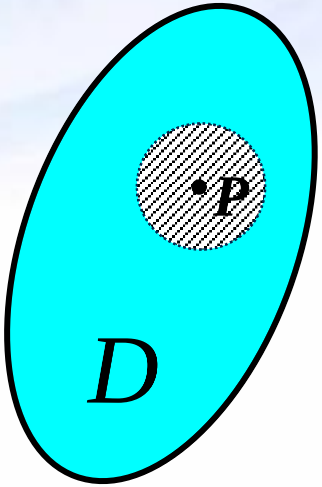
说明: 设 $\vec{x} \in R^n, \delta > 0$，记$O(\vec{x},\delta) = \left\{\vec{y} \,\middle|\, d(\vec{y}, \vec{x}) < \delta\right\}$

称 $O(\vec{x},\delta)$ 为 $\vec{x}$的δ邻域

2、内点、边界点的定义

1）设 $D \subset R^2$，$P(x, y) \in D$，如果存在 $\delta > 0$，

使得 $U(P,\delta) \subset D$，则称 P 为 D 的**内点**。



说明:

对于 $S \subset R^n$， 如果存在 $\delta > 0$，

使得 $O(\vec{x},\delta) \subset S$，则称 $\vec{x}$ 为 S 的内点。

2）S 的内点全体称为 S 的**内部**， 记作 $\overset{0}{S}$.

3）对于 $D\subset R^2, \delta>0$ ，点 P 的任意邻域 $U(P,\delta)$，

有 $U(P,\delta)\cap D\neq\phi$，且 $U(P,\delta)\cap(R^2\setminus D)\neq\phi$，

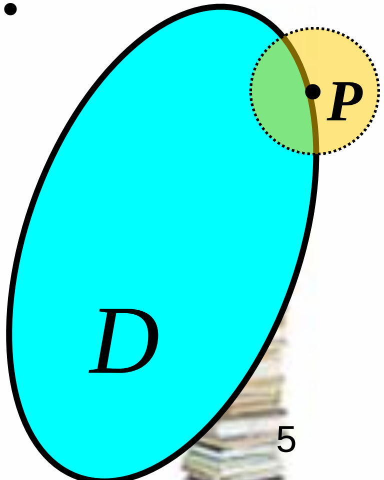
则称 P 为 D 的**边界点**。

说明:

对于任何的$\delta>0$ ，均有 $O(x,\delta)\cap S\neq\phi$

且$O(x,\delta)\cap(R^n\setminus S)\neq\phi$，则称 x 为 S 的边界点。

4）S 的边界点全体称为 S 的**边界**，记作∂S .



3、开集、闭集的定义

设 $S \subset R^n$，如果 S 中的每一点均为 S 的内点，则称 S 为**开集**。

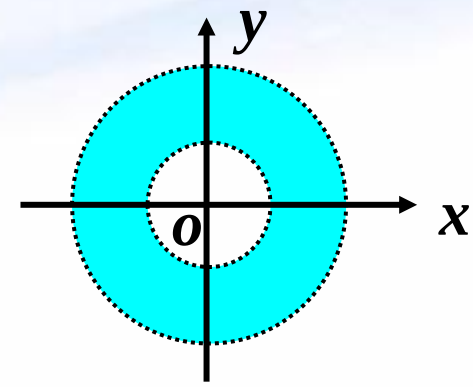
如果 $\partial S \subset S$，则称 S 为**闭集**。

折线：R^n 中首尾彼此相接的有限条线段组成。

连通：如果任意两点 $x, y \in S \subset R^n$，都有一条完全落在 S 中的折线将 x 和 y 连接起来，则称 S 为**连通**。

4、区域的定义

$\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$



R^2

1）R^n 中的连通开集称之为**开区域**；

简称区域。

如：对 $\delta>0$ ，$D=\left\{\vec{x}\,\middle|\,\vec{x}\in R^2,|\vec{x}|<\delta\right\}$

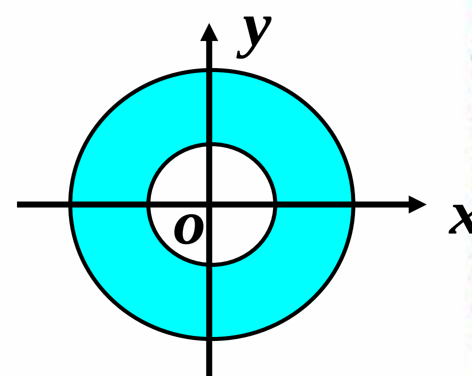
是 R^2 中的一个开区域。

2）开区域连通它的边界组成的集合，称为**闭区域**。

如：对 $\delta>0$ ，$D=\left\{\vec{x}\,\middle|\,\vec{x}\in R^2,|\vec{x}|\le\delta\right\}$

是 R^2 中的一个闭区域。

$\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

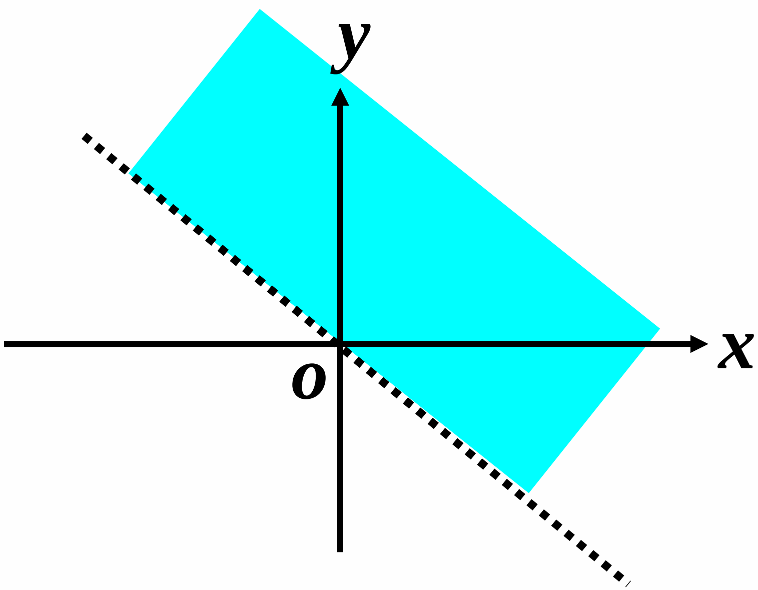


3）S 是 R^n 的一个区域，如果存在 $\delta > 0$，

使得 $S \subset O(0,\delta)$，则称 S 为**有界闭集**。

否则 S 为**无界闭集**。

如：R^2



$$\{(x,y) \mid x + y > 0\}$$

二、多元函数

1、多元函数的定义

设 D 为 R^2 中的一个点集，如果按法则 f，对 D 中每个点 $P(x, y)$ ，均有确定的实数 z 与之对应，则称 f 是以 D 为定义域的 **二元函数**。

记为：$z = f(x, y)$ 或 $z = f(P)$

也可记为：$f: \ D \to R$ 即 $\vec{x} \mapsto y \quad \vec{x} \in D$

称 $R(f) = \{ f(x) | x \in D \}$ 为函数 f 的值域。

说明:

1）类似地可定义三元函数、n 元函数

设 D 为 R^n 中的一个点集，如果按法则 f，

对 D 中每个点 x，均有确定的实数 y 与之对应，

则称 f 是以 D 为定义域的 **n 元函数**。

记为：$y=f(\vec{x})$ 或 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$

其中 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n$.

2）多元函数中同样有定义域、值域、

自变量、因变量等概念。

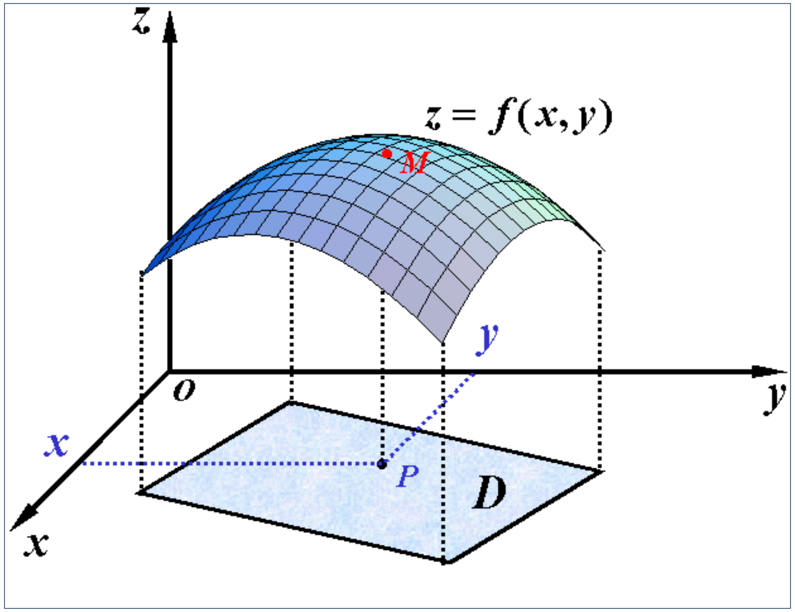
例1、求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域。

2、二元函数的几何意义

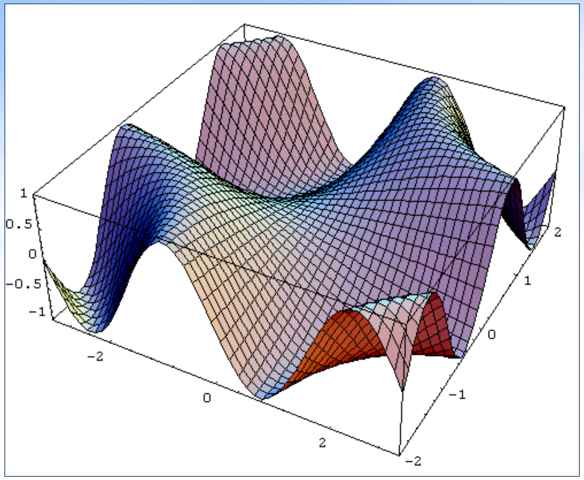
二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域 D_f 是 Oxy 平面上的一个平面点集，其图形

$$G(f) = \left\{(x, y, z) \middle| z = f(x, y), (x, y) \in D_f \right\}$$

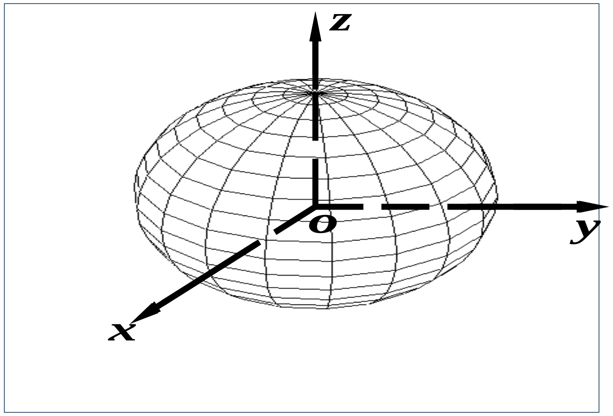
是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一个曲面。



$$z = \sin xy$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



显然，当自变量的个数多于两个时，难以手绘，所以分析与代数方法尤为重要。

3、多元线性函数

定义 设 f 是定义在 R^n 上的函数，如果对任意 $\alpha, \beta \in R$，和任意 $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$，均有

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha f(\vec{x})+\beta f(\vec{y})$$

则称 f 是 R^n 上的 **线性函数**。

例2、$f(\vec{x})=3x_1+2x_2 \quad \vec{x}=(x_1,x_2)^T \in R^2$

是一个 R^2 上的线性函数。

三、多元函数的极限

二元函数极限定义

设 f 是定义在 $D \subset R^2$ 上的一个函数，P_0 是 D 的一个内点或边界点，A 是某个常数，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当一切 $P(x, y) \in D$，且 $0 < \left|\overrightarrow{P_0P}\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时，

都有 $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$ 成立，

则称 A 为二元函数 f 在**点 P_0 处的极限**，

记作 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x, y) = A$

或 $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ **二重极限**

n 元函数极限定义

设 f 是定义在 $D\subset R^n$ 上的一个函数，x_0 是 D 的一个内点或边界点，A 是某个常数，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当一切 $x\in D$，且 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

则称 A 为二元函数 f 在 点 x_0 处的极限，

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ $\quad x=(x_1,\cdots,x_n)$ $\quad x_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$

或 $\lim\limits_{(x_1,\cdots,x_n)\to(x_1^0,\cdots,x_n^0)} f(x_1,\cdots,x_n)=A$

说明:

1）定义中 $P \to P_0$ 的方式是任意的。

如在 R^2 中，只有当 P 以任何方式趋于 P_0 时，极限都相同，极限 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x,y)$ 才存在。

例3、讨论当 $(x,y) \to (0,0)$ 时，函数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的极限是否存在？

2）由于二元函数极限以任何方式趋近，所以当 P 以某一特殊方式（即特定方向）趋于 P_0 时有极限，不能确定此极限存在。

如：当 P 以不同方式趋于 P_0 时，有不同的值，

或当 P 以某一方式趋于 P_0 时，极限不存在，

则函数极限不存在。

3）二元函数的极限运算法则与一元函数的极限运算法则类似。

四、多元函数的连续性

二元函数连续性定义

设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义

如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

则称 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续；

如果 $f(x,y)$ 在 D 的每一点上均连续，

则称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数。

多元函数连续性定义

设函数 f 定义于 R^n 中的区域 D 上，$x_0 \in D$,

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$x = (x_1, \cdots, x_n)^T \quad x_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)^T$$

则称 f 在 x_0 处连续；

如果 f 在 D 的每一点上均连续，

则称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数。

说明:

1）多元函数在某点连续时，其极限值 = 函数值；

2）多元连续函数四则运算后仍保持连续性；

3）一般地，由 $x=(x_1,\cdots,x_n)$的分量 $x_1,\cdots x_n$ 的基本初等函数经过有限次的四则运算以及基本初等函数的复合所得到的函数属于 n 元初等函数，在其定义域上是连续的；

4）多元初等函数在其定义域内是连续的。

二元函数极限常用方法

例4、求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

例5、求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{\sqrt{1+xy}-1}$

例6、求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

例7、求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

说明:

对二元函数极限的计算，可参照求一元函数极限的解题思路，如四则运算法则、无穷小替代、两个重要极限、变量代换等。

例8、讨论函数的连续性

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x^2y}}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

五、有界闭区域上连续函数性质

最大最小值定理

设 f 是 R^n 中有界闭区域 D 上的连续函数，

则 f 必能在 D 上取到最大值和最小值，

即存在 $x_1, x_2 \in D \subset R^n$ ，

使得 $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$， $x \in D$.

介值定理

设 f 是 R^n 中有界闭区域 D 上的连续函数，

M 和 m 分别是 f 在 D 上最大值和最小值，

则对于介于 m和M 间的任何实数 c ，

必有 $\xi_c \in D$，使得 $f(\xi_c) = c$.