第十一章　概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

在现实世界中存在大量的机遇和风险，概率统计可以为有效处理信息、正确作出决策、捕捉机遇、减少风险提供有力的工具。

其应用极其广泛：

“数学的伟大使命是在混沌中发现有序”

概率论：

概率论是一门研究客观世界随机现象数量规律的数学分支学科。

从数学模型进行理论推导，从同类现象中找出规律性。起源与博弈问题有关。

16世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题；17世纪中叶，法国数学家 B . 帕斯卡、荷兰数学家荷兰数学家 C . 惠更斯 基于排列组合的方法，研究了较复杂 的赌博问题， 解决了“ 合理分配赌注问题” (即得分问题) .

对客观世界中随机现象的分析产生了概率论；使概率论成为 数学的一个分支的真正奠基人是瑞士数学家 J．伯努利；而概率论的飞速发展则在17世纪微积分学说建立以后。

第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制论与数理统计学等学科。

数理统计：

数理统计学是一门研究怎样有效地收集、整理和分析含有随机性的数据，以对所考察的问题作出推断或预测，直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议的数学分支学科。

着重于数据处理，在概率论理论的基础上对实践中采集得的信息与数据进行概率特征的推断。

目前，概率论与数理统计进入其他自然科学领域的趋势还在不断发展。在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题，都大量采用

《概率论与数理统计》。

法国数学家拉普拉斯 (*Laplace*) 说：

“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题。”

英国的逻辑学家和经济学家杰文斯曾说：

“概率论是生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，那么我们就寸步难行，无所作为。

复习

加法原理：

完成一件工作有n个独立的途径(只要选择其中一个途径即方法就可完成这件工作), 第一个途径有 m_1 种方法，……第 n 个途径有 m_n种方法，则完成这件工作共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$ 种方法。

乘法原理：

完成一件工作须 n 个步骤(仅当n 个步骤都完成，才能完成这件工作)。第一步有m_1 种方法，第二步有m_2 种方法，…第n 步有 m_n 种方法，则完成这件工作共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$ 种方法。

排列：

1. 从 n 个不同元素中任取出 m $(m \le n)$个，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列。排列总数有：

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots\cdots[n-(m-1)]$$

2. 从 n 个不同元素中有放回地取 m 个按照一定的顺序排成一列，其排列总数有：$N = n \times n \times \cdots \times n = n^m$

组合：

1. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素组合，不考虑元素的顺序，其组合总数为：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

§1 概 率

一、基本概念

什么是随机现象？用两个简单的试验来阐明，试验是对自然现象进行一次观察或进行一次科学试验。

试验1： 一袋中装有十个外形完全相同的白球，搅匀后从中任取一球。

试验2： 一袋中装有四白三黑三红大小形状完全相同的球，搅匀后从中任取一球。

对于试验1，根据其条件，就能断定其结果取出的必是白球。这类根据试验开始的条件，就能确定试验的结果所反映的现象称为 **确定性现象**。

例如：

1．标准大气压下水加热到100 ^{0}C ，必沸腾；

2．金属必导电；

3．实系数奇次方程必有一实根。

对于试验2，据其条件，在球没有取出之前，不能断定其结果是白球、红球或是黑球。

这类在相同条件下重复进行观察或试验，每次试验的结果不只一个，且每次观察或试验的结果事先不可预知的试验或观察，称为 **随机试验**。 它所对应的现象称为 **随机现象**。

例如：

1．掷一枚均匀的硬币，考虑出现哪一面；

2．抽查生产流水线产品，是正品还是次品；

3．观察一天电话总机接到的呼叫次数。

上述试验的共同特点是：

试验的结果具有“不确定性”，不能断言其结果是什么，但是“大数次”重复这个试验，试验结果又遵循某些规律，这种规律称之为“统计规律”。正是“概率论与数理统计”研究的对象。

样本点：每一个可能出现的结果，称为试验的一个 样本点，记为 ω

样本空间：样本点全体构成的集合，记为 Ω .

样本空间中所含的样本点可以是有限的：

例：检验血型 $\omega_1=\{A\}$ $\omega_2=\{B\}$ $\omega_3=\{O\}$ $\omega_4=\{AB\}$

则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$

无限的：例：测定溶液的浓度 则 $\Omega=\{\omega_x \mid 0\le x\le 1\}$

随机事件 在随机试验中，可能发生也可能不发生的事件，简称事件。通常用 A，B，$\cdots$ 表示。

基本事件 仅含有一个样本点的随机事件。

复合事件 含两个或两个以上样本点的随机事件。

必然事件 必然会发生的事件，记为 Ω

不可能事件 试验中不可能发生的事件，记为 ϕ

例. 掷骰子试验

基本事件： ω_k = { 出现 k 点 } k=1，2，……，6 .

复合事件： A= { 出现偶数点 }

B= { 出现的点数大于2小于6 } …

必然事件：Ω= { 出现小于 7 的点 }

不可能事件： φ= { 出现大于6 的点 }

例. 考查地震震源

x —震源经度 y —震源纬度 z —震源深度

则 Ω ={（x,y,z）（x,y,z）$\in \mathbf{V}$ V 为三维空间某区域 }

二. 事件的关系和运算

1. 包含 若事件A发生,则事件B一定发生,

称事件B包含事件A. 记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$

2. 相等 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 称事件A与B相等,

记为 $A = B$

3. 事件的并(和) "事件A与B至少有一个发生"

称其为事件A与B的并(和)事件,

记为 $A \cup B$ 或 $A + B$ ={ A与B至少一个发生 }

可推广:有限个: { $A_1, A_2, \cdots A_n$ 至少一个发生}

$$= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

无限个: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

4. 事件的交(积)　“事件A与B同时发生”

称其为事件A与B的交(积)事件，

记为 $A\cap B$ 或 $AB=\{A$与B同时发生$\}$

可推广：有限个： $\{A_1, A_2, \cdots A_n$ 同时发生$\}$

$$=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

无限个： $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=1}^{n}A_i$

5. 互逆(对立)事件

“事件A与B不能同时发生，但必须有一个发生”即

$A\cap B=\phi$ 且 $A\cup B=\Omega$

称其为事件A与B是互逆(对立)事件，

记为 $\bar{A}=B=\Omega-A$ 或 $\bar{B}=A=\Omega-B$

6. 互斥(互不相容)事件

"事件A与B不能同时发生" 即 $A \cap B = \phi$

称其为事件A与B是互斥(互不相容)事件。

注意： 1) A与$\bar{A}$互为对立事件 $\Leftrightarrow A \cap \bar{A} = \phi \quad A + \bar{A} = \Omega$

2) 当事件A与B互逆(对立)时，A与B既不能同时发生，也不能同时不发生。即

A发生时，B一定不发生，而A不发生时，B一定发生。

3) 互不相容事件不一定是互逆事件。

7. 差事件 "事件A发生而B不发生"，称其为

事件A与B之差事件，记为 $A - B = A\bar{B}$

8. 完备事件组 若$A_1, A_2, \cdots A_n$为两两互不相容的事件，

且 $A_1 + A_2 + \cdots A_n = \Omega$

称$A_1, A_2, \cdots A_n$构成一个完备事件组。

例1. 在检验某种圆柱形产品时，要求它的高度和直径都符合规格才算合格。则

“高度合格”设为 A_1， “高度不合格”设为 A_2，

“直径合格”设为 A_3， “直径不合格”设为 A_4，

均为基本事件；

1）“产品合格”、“产品不合格”均为复合事件；

2）事件“高度不合格”必然导致“产品不合格”所以，“产品不合格”这一事件包含“高度不合格”这一事件；

3）“产品不合格”就是“高度不合格”与“直径不合格”之和（并），即 $A_2 + A_4$ 或 $A_2 \cup A_4$；

4）“产品合格”就是“高度合格”与“直径合格”之积（交），即 $A_1 A_3$ 或 $A_1 \cap A_3$；

5）“高度合格但直径不合格”就是“高度合格”与“直径合格”之差，即 $A_1 - A_3$ 或 $A_1 A_4$.

例2. 从一批产品中每次取出(不放回)一件进行检验，事件 $A_i\ (i=1,2,3)$ 表示第 i 次取到次品，试用A_i表示

1) 三次中至少有一次取到次品；

2) 三次中最多有一次取到次品；

3) 三次中恰好有一次取到次品。

解：1) " 至少 " $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

2) " 最多 " $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

3) " 恰好 " $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3$

例3. 在一次乒乓球比赛中设立奖金1000元。比赛规定谁先胜三盘，谁获得全部奖金。设甲、乙二人的球技相当，现已打了3 盘，甲两胜一负，由于某种特殊的原因必须中止比赛。问这1000元应如何分配才算公平？

三. 古典概率

概率的直观描述：

度量事件 A 发生的可能性大小的数称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

概率的统计定义：

对于一随机现象，如果在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 m 次，当 n 逐渐增大时，比值 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动，则称此数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$

注意：称 m 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数；

称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率；

而事件 A 的概率 $P(A)$ 是事件 A 在一次试验中发生的可能性大小。

古典概型的定义：

样本空间有 Ω 由有限个样本点 $\omega_1,\cdots\omega_n$ 构成，这些样本点所代表的基本事件两两互斥，且每次试验中各基本事件 $\omega_1,\cdots\omega_n$ 的发生是等可能的。称这类随机现象的数学模型为古典概型。

古典概率的定义：

在古典概型中，若试验结果共有 n 个基本事件 $\omega_1,\cdots\omega_n$，即试验的所有可能结果的事件全体为 $\Omega=\{\omega_1,\cdots\omega_n\}$，而事件 A 由其中 m 个事件 $\omega_{i1},\cdots\omega_{im}$ $(m\le n)$ 组成，则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{所包含样本点数}}{\text{样本空间样本点总数}}=\frac{m}{n}$$

称为古典概率。

其中 $i_1,\cdots i_m$ 是由 n 个数字 1, 2, … , n 中指定的 m 个不同的数。

几何概率的定义：

设平面区域 D 的面积为 S，质点可等可能地落在 D 内的任意一点，区域 σ 是 D 的一部分，面积为 s，设事件

$A=\{$ 点落入$\sigma\}$，定义事件 A 的概率为：

$$P(A)=\frac{\sigma\text{的面积}}{D\text{的面积}}=\frac{s}{S}$$

类似地可以对线段或空间区域定义几何概率。

问题：

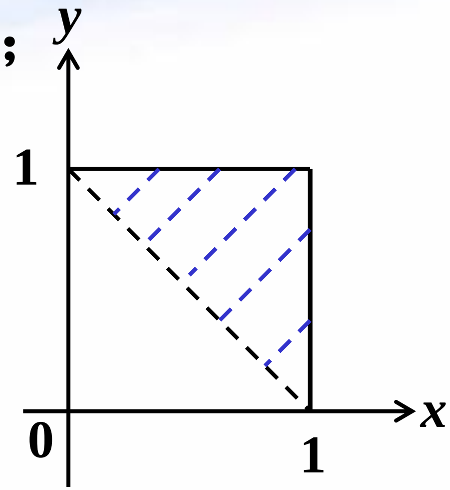
1）概率为 0 的事件为什么不一定是不可能事件？

2）概率为 1 的事件为什么不一定发生？

设 E（如图）：随机地向长为 1 的正方形内投点；

事件 A：点投在阴影与非阴影的两个三角形内；

事件 B：点投在阴影与非阴影的交线上；



则：

$$P(A)=\frac{S_{阴}+S_{非阴}}{S_{正}}=\frac{1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}{1}=1$$

由于点可能投在正方形的对角线上，事件 A 未必一定发生；

而 $$P(B)=\frac{0}{S_{正}}=0$$

由于点投在正方形的对角线上，

事件 B 发生了，即不是不可能事件。

四、概率的公理化定义

定义： 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率。

$\Omega \mapsto P(A)$ $P(A)$ 也称为集合函数。

集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下几条公理：

1）非负性：对 Ω 的任一子集，即事件 A 有 $0 \le P(A) \le 1$

2）规范性： $P(\Omega)=1$ $P(\phi)=0$

3）可列可加性：设可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$，是一系列两两互不相容的事件，即 $i \neq j$ 时，$A_i \cap A_j = \phi$ $i, j = 1, 2, \cdots$

则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

即 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 则称这个集合函数 $P(\cdot)$ 为概率。

概率的性质：

性质1（有限可加性）

若 n 个（有限个）两两互斥事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$

即 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 满足 $A_i \cap A_j = \phi \quad i, j = 1, 2, \cdots$

则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ 或 $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

性质2（互逆事件的概率公式）

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 构成一个完备事件组，

则 $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$

性质3（单调性）

设事件A和B满足$A\subset B$，则

1) $P(A)\le P(B)$　　2) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

性质4（加法定理）

任何两个事件A与B的并事件的概率公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

可推广到有限个事件：

设$A_1,A_2,\cdots A_n$是n个事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

五、古典概型的例子

例1、一次投二颗骰子，求

1）事件 A 出现的点数之和等于 3 的概率。

2）事件 B 为出现的点数之和为奇数的概率。

注意：找出基本事件组成的样本空间，必须是等概率的；同一问题可以取不同的样本空间解答。取到的样本空间越小，计算会越简单。

例2、一个口袋中有10 个白球3 个红球，质地大小均一样，某人

1）从中任取一球，求取得是白球的概率；

2）从中任选取4 个球，求取得的球为两白、两红的概率。

一般地，若一个袋中有质地大小相同的 $m+n$ 个球，其中 m 个白球，n 个黑球，那么从中任取 $a+b$ 个球，$a \le m, b \le n$ 取出的球中恰好有 a 个白球，b 个黑球的这个事件 A 的概率为 $$P(A)=\frac{C_m^a C_n^b}{C_{m+n}^{a+b}}$$

例3、两封信随机地向标号为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的4个邮筒投寄，

求：1）前两个邮筒内没有信的概率

2）第Ⅱ个邮筒恰好被投入一封信的概率。

例4：区长办公室某一周内曾接待 9 次来访，这些来访都是周三或周日进行的，是否可以断定接待时间是有规定的？

例5、盒中有6只灯泡，其中有2只次品，4只正品，

1）有放回地从中任取两次，每一次取一只；

2）无放回地从中任取两次，每一次取一只；

3）从中任取二只（指一次抽取二只）.

求下列事件的概率：$A = \{$ 取到的二只都是次品 $\}$

$B = \{$ 取到的二只中，正、次品各一只 $\}$

$C = \{$ 取到的二只至少有一只正品 $\}$

注：无放回地逐次抽取 m 次每次一只 = 一次抽取 m 只；

如果不是有放回抽取时，就统称任意取出m 个。

例6、（抽签问题的模型）

箱中有α个白球，β个黑球，假定它们的大小重量相同。

1）从中任取$a+b$个球，问取出的球中恰好有有a个白球，b个黑球的概率。$(a \le \alpha, b \le \beta)$

2）从中随机任意地连续一个一个地摸出来（不放回），求第k次（$1 \le k \le \alpha+\beta$）摸出黑 球的概率。

注：2）中所求事件的概率与k无关，即每一次摸到黑球的概率是一样的，这是抽签问题的模型，即抽签时各个机会均等，与抽签先后的顺序无关，所以抽签时不必争先恐后。

例7、（分房问题的模型）

将 n 个人等可能地分配到 N 个房间，试求：

1）恰好有n 个房间中各有一个人的概率；

2）某指定的n 个房间中各有一个人；

3）至少有两个人在同一房间中 ；

4）每个房间至多有一个人；

5）某指定的房间中恰有m 个人。

注意：

“人”：人、球、信、钥匙

$\longleftrightarrow$

“房”：生日、盒子、信封、门匙

例8、某人一次写了n封信，并分别在n个信封上写下这n封信的地址。如果他任意将这n封信纸装入写好地址的n个信封问至少有一封信和信封是匹配的概率是多少？

球与盒子的“ 匹配问题 ”