概率论习题

§1 概率

1．设 A、B、C 表示 3 个随机事件，试将下列事件用 A、B、C 表示出来：

（1） A、C 出现， B 不出现；

（2）恰好有 2 个事件出现；

（3）3 个事件中至少有 2 个出现；

（4）3 个事件中不多于 1 个出现．

2．在某系中任选一个学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该学生是三年级学生，事件 C 表示该学生是优秀生．试用 A、B、C 表示下列事件：

（1）选到三年级的优秀男生；

（2）选到非三年级的优秀女生；

（3）选到的男生但不是优秀生；

（4）选到三年级男生或优秀女生．

3．写出 n 个人组成的班级的一次某学科测验的平均成绩的样本空间。

4．某市发行 A、B、C 三种报纸．在该市的居民中，订阅 A 报的占 45%，订阅 B 报的占 35%，订阅 C 报的占 30%，同时订阅 A 报及 B 报的占 10%，同时订阅 A 报及 C 报的占 8%，同时订阅 B 报及 C 报的占 5%，同时订阅 A、B、C 报的占 3%，求下列事件的概率：

（1）只订阅 A 报的；

（2）只订阅 A 报及 B 报的；

（3）只订阅一种报纸的；

（4）正好订阅两种报纸的；

（5）至少订阅一种报纸的；

（6）不订阅任何报纸的．

5．掷两粒骰子，出现的点数之和小于 5 或是偶数的概率是多少？

6．袋中有 4 粒黑球，1 粒白球，每次从中任取一粒，并换入一粒黑球，这样连续进行下去，求第三次取到黑球的概率。

7．任取一个正整数，该数的平方的末尾数是 1 的概率是多少？

8．有 10 本不同的数学书，5 本不同的外文书，任意地摆放在书架上，求 5 本不同的外文书放在一起的概率．

9．从 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个数字中任取三个数，求

（1）三个数之和为 10 的概率；

（2）三个数之积为 21 的倍数的概率．

10．n 个人围着圆桌随机而坐，那么其中甲、乙两人坐在一起的概率是多少？

11．甲、乙两人投掷均匀硬币，甲投掷 $n+1$ 次，乙投掷 n 次，那么甲投掷出的正面次数大于乙投掷出的正面次数的概率是多少？

12．随机地向圆 $x^2+y^2-2ax=0$（$a>0$）的上半部分内投掷一点，假设点等可能地落在半圆内任何地方，那么原点与该点的连线的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率是多

少？

13．设 A，B 是两个事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$．问：

（1）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？

（2）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

§2 条件概率与事件的独立性

14．证明：如果 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，则随机事件 A、B 相互独立。

15．袋中有 5 把钥匙，只有一把能打开门，从中任取一把去开门，求在（1）有放回；（2）无放回的两种情况下，第三次能够打开门的概率。

16．某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4．问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少？

17．经统计，某城市肥胖者占 10%，中等体型人数占 82%，消瘦者占 8%．已知肥胖者患高血压的概率为 0.2，中等体型者患高血压的概率为 0.1，消瘦者患高血压的概率为 0.05，求：

（1）该城市居民患高血压的概率是多少？

（2）若已知有一个居民患有高血压，那么该居民最有可能是哪种体型的人？

18．将 m 个红球与 n（$n \ge m$）个白球任意排成一排，那么至少有两个红球挨着的概率是多少？

19．设袋中有 5 个白球和 3 个黑球，从中每次无放回地任取一球，共取 2 次，求：

（1）取到的 2 个球颜色相同的概率；

（2）第二次才取到黑球的概率；

（3）第二次取到黑球的概率．

20．为了提高抗菌素生产的产量和质量，需要对生产菌种进行诱变处理，然后从一大批经过处理的变异菌株中抽取一小部分来培养、测定，从中找出优良的菌株．如果某菌种的优良变异率为 0.03，试问从一大批经诱变处理的菌株中，采取多少只来培养、测定，才能以 95%的把握从中至少可以选到一只优良菌株？

21．证明：如果 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，则随机事件 A、B 相互独立。

22．对某目标进行三次射击，各次的命中率分别为 0.2，0.6，0.3，计算：

（1）在三次射击中恰好击中一次的概率；

（2）在三次射击中至少击中一次的概率。

§3 一维随机变量

23．糖果厂生产的巧克力 100 盒装成一箱，在抽样检查时，只从每箱中抽取 10 盒来检查，若发现其中有不合格品，则认为这一箱产品就不合格．假定每箱中不合格品最多不超过 4 支，且有如下表所表示的概率分布：

每箱中不合格品数	0	1	2	3	4
概　　率	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

求一箱巧克力通过检查的概率．

24．保险公司里有25000个同一年龄和同社会阶层的人参加了人寿保险，在一年里每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在一月一日付 12 元保险费，而在死亡时，家属颞向保险公司领2000元，问：

（1）保险公司亏本的概率是多少？

（2）保险公司获利不少于10000元的概率是多少？

25．某电站的供应网有10000盏电灯，夜晚每盏灯开着的可能性是0.7，假定每盏灯开、关的时间相互独立，估计夜晚同时开着的灯数在6800至7200盏之间的概率。

26．某箱内装有药品40盒，其中有3盒是不合格品．现从中任取3盒，求取出的3盒药品中的不合格品数的分布列和分布函数．

27．设随机变量X的可能取值分别为-1，0，1，2，相应的概率依次为$\frac{1}{2c}$，$\frac{3}{4c}$，$\frac{5}{8c}$，$\frac{2}{16c}$，试求：

（1）$P(X<1 \mid X\neq 0)$；

（2）随机变量X的分布函数。

28．设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x，\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

求：（1）A、B的值；

（2）概率密度函数；

（3）$P(|X|<1)$.

29．下列函数定义了发布函数吗？

（1）$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 3x, & 0<x\le\frac{1}{3},\\ 1, & x>\frac{1}{3};\end{cases}$

（2）$F(x)=\frac{2}{\pi}\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

30． 从1,2,3,4,5中任取三个数，设为x_1,x_2,x_3，记$\xi=\max(x_1,x_2,x_3)$，求ξ的分布列及$P(\xi\le 3)$。

31．设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求：

（1）$P(\mu-0.32\sigma\le X\le\mu+0.32\sigma)$；

（2）$P(\mu+1.15\sigma<X<\mu+2.58\sigma)$；

（3）$P(|X-\mu|>2.58\sigma)$.

32. 设随机变量 $X\sim N(-1,\sigma^2)$，且 $P(-3\le X\le -1)=0.4$，求 $P(X\ge 1)$.

33. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} a+be^{\frac{-x^2}{2}}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

试求：

（1） 常数 a，b；

（2） 概率密度函数；

（3） $P\left(\sqrt{\ln 4}\le X\le \sqrt{\ln 16}\right)$.

34. 设随机变量 X 的分布列为

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y=\frac{2}{3}X+2$ 与 $Z=\cos X$ 的分布列.

35. 设随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布列.

36. 设随机变量 $X\sim N(-1,\sigma^2)$，且 $P(-3\le X\le -1)=0.4$，求 $P(X\ge 1)$.

37. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P(X\le -5)=0.045$，$P(X\le 3)=0.618$，求 μ 和 σ。

§4 二维随机变量

38. 袋中有号码为 1，2，2，3 的四个球，从中不放回地抽取两个球。设 ξ、η 分别为第一次和第二次取到的球的号码。求：

（1）(ξ,η) 的联合分布列；

（2）ξ、η 的边际分布列；

（3）$P(\xi \le 2,\ \eta < 2)$。

39．随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} k(x+y), & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求：（1）k的值；

（2）ξ、η的边际分概率密度函数；

（3）$P(\xi<0.5,\eta<0.5)$。

40．设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，证明：

（1）$aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$；

（2）$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

41．随机向量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\frac{c}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

求：（1）常数c；

（2）$p(0<\xi<1, 0<\eta<1)$；

（3）边际概率密度函数；

（4）ξ、η是否相互独立？

42．从$(0,1)$内任取两个数，求：

（1）两数之和小于 1.2 的概率；
（2）两数之积小于 0.25 的概率。

§5 随机变量的数字特征

43．设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{a}{x^3}, & x \ge 3, \\ 0, & x \le 3, \end{cases}$$

求a、EX、DX。

44．设随机向量$(X,\ Y)$的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

判别 X 、Y 是否独立？是否相关？

45．设 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}，\ -\infty<x<+\infty，$$

求 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数。

46．设随机变量 ξ、η 相互独立，证明：

$$D(\xi\eta)=D\xi D\eta+D\xi(E\eta)^2+D\eta(E\xi)^2。$$

47．设 ξ 、η 为两个随机变量，证明：若 ξ 、η 相互独立，则 ξ 、η 一定线性不相关；反之，ξ 、η 线性不相关，说明 ξ 、η 不一定相互独立。

§6 大数定律和中心极限定理

48．某厂采购的某商品每月的销售量 $X\sim U[2000,4000]$（单位：吨）。每销售一吨获利 3 万美元。若卖不出去，每吨仓储费 1 万美元。该厂月初应组织多少货物才能使利润最大？

49．临床上急性肠梗阻分为单纯性(A_1)与绞窄性(A_2)两类，从发病的表现来看，有的发病急(B_1)，有的发病缓(B_2)．现有 545 例急性肠梗阻资料如下：

	A_1	A_2	合计
B_1	69	174	243
B_2	194	108	302
合计	263	282	545

试求：$P(A_1)$，$P(B_2)$，$P(A_1B_2)$，$P(A_1\mid B_2)$，$P(B_2\mid A_1)$ 的近似值，并说明依据．

50．有一种新药，据说能有效地治愈流行性感冒．在 500 名流感病人中，有 210 人服用此药，其中 170 人痊愈；290 人未服用此药，有 230 人痊愈．试判断这种新药对医治流感是否有效？

51．设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，$E\left(X_n^4\right)<+\infty$。已知 $E\left(X_n\right)=\mu$，$D\left(X_n\right)=\sigma^2$，设 $Y_n=\left(X_n-\mu\right)^2$，$n=1,2,\cdots$，那么随机变量序列 $\{Y_n\}$ 是否服从大数定律？

52．已知在抛掷硬币试验中，正面出现的概率为 0.5。为了使出现正面的频率与之概率之差的绝对值不超过 0.01 的概率不小于 99%，试验次数至少应该多少次？

53．某单位有 200 台电话机，每台电话机大约有 5%的时间要使用外线通话．若每台电话机使用外线与否是相互独立的，问该单位总机至少需要安装多少条外线，才能以 90%以上的概率保证每台电话机需要使用外线通话时可供使用．