习　题　4.5　高阶导数和高阶微分

1. 求下列函数的高阶导数：

(1) $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$，求 y'''；　(2) $y = x^4 \ln x$，求 y''；

(3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$，求 y''；　(4) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$，求 y''；

(5) $y = \sin x^3$，求 y''、y'''；　(6) $y = x^3 \cos\sqrt{x}$，求 y''、y'''；

(7) $y = x^2 \mathrm{e}^{3x}$，求 y'''；　(8) $y = \mathrm{e}^{-x^2} \arcsin x$，求 y''；

(9) $y = x^3 \cos 2x$，求 $y^{(80)}$；　(10) $y = (2x^2+1)\operatorname{sh} x$，求 $y^{(99)}$.

解　(1)　$y' = 3x^2 + 4x - 1,\ y'' = 6x + 4,\ y''' = 6$。

(2)　$y' = 4x^3 \ln x + x^3$，　$y'' = 12x^2 \ln x + 4x^2 + 3x^2 = 12x^2 \ln x + 7x^2$。

(3)　$y' = \dfrac{2x\sqrt{1+x} - x^2 \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \dfrac{4x+3x^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$，

$$y'' = \frac{(4+6x)(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(4x+3x^2)(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2(1+x)^3} = \frac{3x^2+8x+8}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}。$$

(4)　$y' = x^{-1} \cdot x^{-2} - 2\ln x \cdot x^{-3} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，

$y'' = -2x^{-1}x^{-3} - 3(1-2\ln x)x^{-4} = \dfrac{6\ln x - 5}{x^4}$。

(5)　$y' = \cos x^3 \cdot (3x^2) = 3x^2 \cos x^3$，

$y'' = 6x\cos x^3 + 3x^2(-\sin x^3)(3x^2) = 6x\cos x^3 - 9x^4 \sin x^3$，

$y''' = 6\cos x^3 - 6x\sin x^3 \cdot (3x^2) - 36x^3 \sin x^3 - 9x^4 \cos x^3 \cdot (3x^2)$

$= -54x^3 \sin x^3 - (27x^6 - 6)\cos x^3$。

(6)　$y' = 3x^2 \cos\sqrt{x} + x^3(-\sin\sqrt{x})(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}) = 3x^2\cos\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\sin\sqrt{x}$，

$$y''=6x\cos\sqrt{x}+3x^2(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}(\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=(6x-\frac{1}{4}x^2)\cos\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}\text{，}$$

$$y'''=(6-\frac{x}{2})\cos\sqrt{x}+(6x-\frac{x^2}{4})(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{33}{8}x^{\frac{1}{2}}\sin\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=(6-\frac{15}{8}x)\cos\sqrt{x}+(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{57}{8}x^{\frac{1}{2}})\sin\sqrt{x}\text{。}$$

（7） $y'=2xe^{3x}+x^2e^{3x}(3x)'=(2x+3x^2)e^{3x}$，

$y''=(2+6x)e^{3x}+(2x+3x^2)e^{3x}(3x)'=(9x^2+12x+2)e^{3x}$，

$y'''=(18x+12)e^{3x}+(9x^2+12x+2)e^{3x}(3x)'=(27x^2+54x+18)e^{3x}$。

（8） $y'=(-x^2)'e^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}(\arcsin x)'=(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}$，

$$y''=(-x^2)'(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}+(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})'e^{-x^2}$$

$$=(-2x)(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})e^{-x^2}+\left[-2\arcsin x-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}+(-\frac{1}{2})\frac{(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}$$

$$=\left[2(2x^2-1)\arcsin x+\frac{x(4x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2};$$

（9） $y^{(80)}=x^3\cos^{(80)}2x+C_{80}^1 3x^2\cos^{(79)}2x+C_{80}^2 6x\cos^{(78)}2x+C_{80}^3 6\cos^{(77)}2x$

$$=2^{80}x^3\cos 2x+80\cdot 2^{79}\cdot 3x^2\sin 2x-3160\cdot 2^{78}\cdot 6x\cos 2x-82160\cdot 2^{77}\cdot 6\sin 2x$$

$$=2^{80}\left[x(x^2-4740)\cos 2x+(120x^2-61620)\sin 2x\right]\text{。}$$

（10） $y^{(99)}=(2x^2+1)\mathrm{sh}^{(99)}x+C_{99}^1 4x\,\mathrm{sh}^{(98)}x+C_{99}^2 4\,\mathrm{sh}^{(97)}x$

$$=(2x^2+1)\mathrm{ch}\,x+99\cdot 4x\,\mathrm{sh}\,x+4851\cdot 4\mathrm{ch}\,x$$

$$=(2x^2+19405)\mathrm{ch}x+396x\mathrm{sh}x\text{。}$$

2. 求下列函数的n阶导数$y^{(n)}$：

(1) $y=\sin^2\omega x$；　　(2) $y=2^x\ln x$；

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$；

(5) $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$；　　(6) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解　(1) $y^{(n)}=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\omega x)^{(n)}=-2^{n-1}\omega^n\cos(2\omega x+\dfrac{n}{2}\pi)$

$=2^{n-1}\omega^n\sin(2\omega x+\dfrac{n-1}{2}\pi)$。

(2) $y^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(2^x)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}=\ln^n 2\cdot 2^x\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k 2^x\ln^{n-k}2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k-1)}$

$=2^x\left[\ln^n 2\cdot\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\ln^{n-k}2\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right]$。

(3) $y^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(e^x)^{(n-k)}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k e^x\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}=e^x\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$。

(4) 由于 $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$，

$y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}\right]$

$=(-1)^n n!\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}(x-2)^k(x-3)^{n-k}}{(x-3)^{n+1}(x-2)^{n+1}}=(-1)^n n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(x-2)^{n-k+1}(x-3)^{k+1}}$。

(5) $y^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(e^{\alpha x})^{(n-k)}\left[\cos(\beta x)\right]^{(k)}=e^{\alpha x}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k\cos(\beta x+\dfrac{k\pi}{2})$。

(6) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=1-\dfrac{1}{4}(1-\cos 4x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\cos 4x}{4}$，

所以

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})。$$

3. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0,\\ -x^2, & x<0\end{cases}$$

的各阶导数。

解 当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=-2x$。由

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0，$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0，$$

可知 $f'(x)=2|x|$。

由此得到 $f''(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ -2, & x<0,\\ \text{不存在}, & x=0。\end{cases}$

于是当 $n>2$ 时，$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \text{不存在}, & x=0。\end{cases}$

4．设 $f(x)$ 任意次可微，求

(1) $[f(x^2)]'''$；

(2) $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''$；

(3) $[f(\ln x)]''$；

(4) $[\ln f(x)]''$；

(5) $[f(e^{-x})]'''$；

(6) $[f(\arctan x)]''$.

解 (1) $[f(x^2)]'=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2)$，

$$[f(x^2)]''=2xf''(x^2)(x^2)'+(2x)'f'(x^2)=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)，$$

$$[f(x^2)]'''=4x^2f'''(x^2)(x^2)'+(4x^2)'f''(x^2)+2f''(x^2)(x^2)'=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)。$$

(2) $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$，

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]''=-\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)，$$

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^6}\left[f'''\left(\frac{1}{x}\right)+6xf''\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]。$$

（3） $[f(\ln x)]'=f'(\ln x)(\ln x)'=\frac{f'(\ln x)}{x}$，

$[f(\ln x)]''=\frac{f''(\ln x)(\ln x)'\cdot x-f'(\ln x)(x)'}{x^2}=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}$。

（4） $[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$，

$[\ln f(x)]''=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$。

（5） $[f(e^{-x})]'=f'(e^{-x})(e^{-x})'=-e^{-x}f'(e^{-x})$

$[f(e^{-x})]''=-e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'-(e^{-x})'f'(e^{-x})=e^{-2x}f''(e^{-x})+e^{-x}f'(e^{-x})$，

$[f(e^{-x})]'''=e^{-2x}f'''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-2x})'f''(e^{-x})+e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-x})'f'(e^{-x})$

$=-e^{-3x}f'''(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-x}f'(e^{-x})$。

（6） $[f(\arctan x)]'=f'(\arctan x)(\arctan x)'=\frac{f'(\arctan x)}{1+x^2}$，

$[f(\arctan x)]''=\frac{(1+x^2)f''(\arctan x)(\arctan x)'-(1+x^2)'f'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}$

$=\frac{f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}$。

5．利用 Leibniz 公式计算 $y^{(n)}(0)$：

（1） $y=\arctan x$；

（2） $y=\arcsin x$。

解（1）由 $y'=\frac{1}{1+x^2},\ y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，令 $x=0$，可得 $y'(0)=1,\ y''(0)=0$。在等式 $y'(1+x^2)=1$ 两边对 x 求 n 阶导数（$n>1$），得到

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(1+x^2)^{(k)}=0，$$

注意到 $(1+x^2)'''=0$，上式简化为

$$y^{(n+1)}(1+x^2)+ny^{(n)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-1)}\cdot 2=0，$$

以 $x=0$ 代入，得到递推公式

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)，$$

从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数};\\ 0, & n\text{为偶数。}\end{cases}$$

（2）由 $y'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\ y''=(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{xy'}{1-x^2}$，令 $x=0$，可得 $y'(0)=1,\ y''(0)=0$，且 $xy'=(1-x^2)y''$。 在等式 $xy'=(1-x^2)y''$ 两边对 x 求 n 阶导数（$n\ge 1$），得到

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(x)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+2)}(1-x^2)^{(k)}，$$

即

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=y^{(n+2)}(1-x^2)^{(k)}-2xny^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}$$

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=y^{(n+2)}(1-x^2)-2xny^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}，$$

以 $x=0$ 代入，得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)，$$

从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2, & n\text{为奇数}；\\ 0, & n\text{为偶数。}\end{cases}$$

6． 对下列隐函数求 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $e^{x^2+y}-x^2y=0$； (2) $\tan(x+y)-xy=0$；

(3) $2y\sin x+x\ln y=0$； (4) $x^3+y^3-3axy=0$.

解 （1）在等式两边对 x 求导，有

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'-(x^2y)'=e^{x^2+y}(2x+y')-2xy-x^2y'=0\text{，}$$

再对 x 求导，得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'(2x+y')+e^{x^2+y}(2x+y')'-(2xy+x^2y')'$$

$$=e^{x^2+y}(2x+y')^2+e^{x^2+y}(2+y'')-2y-4xy'-x^2y''=0\text{，}$$

从而解出

$$y''=\frac{4xy'+2y-e^{x^2+y}[2+4x^2+4xy'+(y')^2]}{e^{x^2+y}-x^2}\text{，}$$

其中 $y'=\dfrac{2x(y-e^{x^2+y})}{e^{x^2+y}-x^2}$。

（2）在等式两边对 x 求导，有

$$\sec^2(x+y)(x+y)'-(xy)'=\sec^2(x+y)(1+y')-y-xy'=0\text{，}$$

再对 x 求导，得到

$$2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(x+y)'(1+y')+\sec^2(x+y)(1+y')'-y'-(xy')'$$

$$=2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2+\sec^2(x+y)y''-2y'-xy''=0\text{，}$$

从而解出

$$y''=\frac{2\sec(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2-2y'}{x-\sec^2(x+y)}\text{，}$$

其中 $y'=\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$。

（3）在等式两边对 x 求导，有

$$2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+\frac{x}{y}\cdot y'=0\text{，}$$

再对 x 求导，得到

$$2y''\sin x+4y'\cos x-2y\sin x+2\frac{y'}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot(y')^2+\frac{x}{y}\cdot y''=0\text{，}$$

从而解出

$$y''=\frac{2y^3\sin x-4y^2y'\cos x-2yy'+x(y')^2}{xy+2y^2\sin x}\text{，}$$

其中 $y'=-\dfrac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$。

（4）在等式两边对 x 求导，有

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0\text{，}$$

再对 x 求导，得到

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''-6ay'-3axy''=0\text{，}$$

从而解出

$$y''=\frac{2x+2y(y')^2-2ay'}{ax-y^2}\text{，}$$

其中 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$。

7． 对下列参数形式的函数求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=at\cos t,\\ y=at\sin t,\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=t(1-\sin t),\\ y=t\cos t,\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=a\,\mathrm{e}^{-t},\\ y=b\,\mathrm{e}^{t},\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t},\end{cases}$ (6) $\begin{cases}x=\sin at,\\ y=\cos bt.\end{cases}$

解 （1） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(bt^3)''(at^2)'-(bt^3)'(at^2)''}{[(at^2)']^3}=\dfrac{(6bt)(2at)-(3bt^2)(2a)}{(2at)^3}=\dfrac{3b}{4a^2t}$。

（2） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(at\sin t)''(at\cos t)'-(at\sin t)'(at\cos t)''}{[(at\cos t)']^3}$

$$=\frac{(2a\cos t-at\sin t)(a\cos t-at\sin t)+(a\sin t+at\cos t)(2a\sin t+at\cos t)}{a^3(\cos t-t\sin t)^3}$$

$$=\frac{(t^2+2)(\sin^2 t+\cos^2 t)}{a(\cos t-t\sin t)^3}=\frac{t^2+2}{a(\cos t-t\sin t)^3}。$$

（3） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(t\cos t)''[(t(1-\sin t)]'-(t\cos t)'[t(1-\sin t)]''}{[t(1-\sin t)]'^3}$

$$=\frac{(-2\sin t-t\cos t)(1-\sin t-t\cos t)-(\cos t-t\sin t)(-2\cos t+t\sin t)}{(1-\sin t-t\cos t)^3}$$

$$=\frac{t^2+2-2\sin t-t\cos t}{(1-\sin t-t\cos t)^3}。$$

（4） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(be^t)''(ae^{-t})'-(be^t)'(ae^{-t})''}{[(ae^{-t})']^3}=\frac{-be^te^{-t}-be^te^{-t}}{-a^2e^{-3t}}=\frac{2b}{a^2}e^{3t}$。

（5） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\sqrt{1-t})''(\sqrt{1+t})'-(\sqrt{1-t})'(\sqrt{1+t})''}{[(\sqrt{1+t})']^3}$

$$=\left[\frac{-1}{4(\sqrt{1-t})^3(2\sqrt{1+t})}-\frac{1}{2(\sqrt{1-t})[4(\sqrt{1+t})^3]}\right](2\sqrt{1+t})^3=-2(1-t)^{-\frac{3}{2}}。$$

（6） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\cos bt)''(\sin at)'-(\cos bt)'(\sin at)''}{(\sin at)'^3}$

$$=\frac{b(-a\sin at\sin bt-b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}=-\frac{b(a\sin at\sin bt+b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}。$$

8． 利用反函数的求导公式 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，证明

（1） $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$； （2） $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

证 （1） $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'})$

$$=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dy}=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}。$$

（2） $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}(\frac{d^2x}{dy^2})=\frac{d}{dy}[-\frac{y''}{(y')^3}]=-\frac{1}{(y')^3}\frac{dy''}{dy}+3\frac{y''}{(y')^4}\frac{dy'}{dy}$

$$=-\frac{1}{(y')^3}\frac{dy''}{dx}\frac{dx}{dy}+3\frac{y''}{(y')^4}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{y'''}{(y')^3}\cdot\frac{1}{y'}+\frac{3(y'')^2}{(y')^4}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}。$$

9． 求下列函数的高阶微分：

(1) $y=\sqrt[3]{x-\tan x}$，求 d^2y；　(2) $y=x^4\mathrm{e}^{-x}$，求 d^4y；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，求 d^2y；　(4) $y=\dfrac{\sec x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 d^2y；

(5) $y=x\sin 3x$，求 d^3y；　(6) $y=x^x$，求 d^2y；

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$，求 d^ny；　(8) $y=x^n\cos 2x$，求 d^ny.

解　(1) $dy=\dfrac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(1-\sec^2 x)dx=-\dfrac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}\tan^2 xdx$，

$$d^2y=[-\frac{2}{9}(x-\tan x)^{-\frac{5}{3}}(1-\sec^2 x)^2-\frac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(2\tan x\sec^2 x)]dx^2$$

$$=\frac{2\tan^4 x+6\sec^2 x\tan x(x-\tan x)}{9(\tan x-x)^{\frac{5}{3}}}dx^2。$$

(2) $d^4y=\sum_{k=0}^{4}[C_4^k(x^4)^{(k)}(e^{-x})^{(4-k)}]dx^4=\sum_{k=0}^{4}C_4^k\dfrac{4!}{(4-k)!}x^{4-k}(-1)^{4-k}e^{-x}dx^4$

$$=(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)e^{-x}dx^4。$$

(3) $dy=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x)\cdot x-\sqrt{1+x^2}\cdot 1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$，

$$d^2y=[\frac{2}{x^3\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x}{2x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}]dx^2=\frac{3x^2+2}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx^2。$$

(4) $dy=[\dfrac{\tan x\sec x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sec x\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}]dx=\dfrac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$，

$$d^2y=\left\{\frac{\sec x\tan x[(x^2-1)\tan x-x]+\sec x[2x\tan x+(x^2-1)\sec^2 x-1]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right\}dx^2$$

$$=\frac{\sec x[(x^2-1)^2(1+2\tan^2 x)-2x(x^2-1)\tan x+2x^2+1]}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}dx^2。$$

（5） $d^3y=[x(\sin 3x)'''+3x'(\sin 3x)'']dx^3=-27(\sin 3x+x\cos 3x)dx^3$。

（6） $dy=de^{x\ln x}=e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=x^x(1+\ln x)dx$，

$$d^2y=[(x^x)'(1+\ln x)+x^x(1+\ln x)']dx=x^x[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}]dx^2。$$

（7） $d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\ln x)^{(k)}(\frac{1}{x})^{(n-k)}dx^n$

$$=[\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}]dx^n$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)dx^n。$$

（8） $d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^n)^{(n-k)}(\cos 2x)^{(k)}dx^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{n!}{k!}x^k)[2^k\cos(2x+\frac{k\pi}{2})]dx^n$

$$=(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{2^kx^k\cos(2x+\frac{k\pi}{2})}{(k!)^2(n-k)!}dx^n。$$

10．求$d^2(e^x)$，其中

(1) x是自变量; (2) $x=\varphi(t)$是中间变量.

解 （1） $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx$，

$$d^2(e^x)=d(e^xdx)=(e^x)'dx^2=e^xdx^2。$$

（2） $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx=e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt$，

$$d^2(e^x)=d(e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt)=[e^{\varphi(t)}\varphi'(t)]'dt^2=e^{\varphi(t)}\left\{[\varphi'(t)]^2+\varphi''(t)\right\}dt^2。$$

11．设$f(u)$，$g(u)$任意次可微，且$g(u)>0$。

(1) 当$u=\tan x$时，求d^2f；

(2) 当$u=\sqrt{v}$、$v=\ln x$时，求d^2g；

(3) $d^2[f(u)g(u)]$；　　　　(4) $d^2[\ln g(u)]$；

(5) $d^2\left[\dfrac{f(u)}{g(u)}\right]$；

解　(1) $df = f'(u)u'(x)dx = f'(\tan x)\sec^2 xdx$，

$$d^2 f = f''(u)[u'(x)]^2 dx^2 + f'(u)u''(x)dx^2$$

$$=[f''(\tan x)\sec^4 x + 2f'(\tan x)\sec^2 x\tan x]dx^2$$。

(2) $u = \sqrt{v} = \sqrt{\ln x}$，

$$dg = \frac{dg}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}dx = g'(u)\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x}dx = g'(\sqrt{\ln x})\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}dx$$，

$$d^2 g = [\frac{g''(u)\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{g'(u)(2x\sqrt{\ln x})'}{(2x\sqrt{\ln x})^2}]dx^2$$

$$=\left\{\frac{g''(u)}{(2x\sqrt{\ln x})^2} - \frac{g'(u)[2\sqrt{\ln x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot(\frac{1}{x})]}{(2x\sqrt{\ln x})^2}\right\}dx^2$$

$$=\frac{g''(\sqrt{\ln x})\sqrt{\ln x} - g'(\sqrt{\ln x})(1+2\ln x)}{4x^2\ln^{\frac{3}{2}}x}dx^2$$。

(3) $d[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]du$，

$$d^2[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2u + [f'(u)g(u) + f(u)g(u)]'du^2$$

$$=[f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2u + [f''(u)g(u) + 2f'(u)g'(u) + f(u)g''(u)]du^2$$。

(4) $d[\ln g(u)] = \dfrac{g'(u)}{g(u)}du$，

$$d^2[\ln g(u)] = \frac{g'(u)}{g(u)}d^2u + [\frac{g'(u)}{g(u)}]'du^2 = \frac{g'(u)}{g(u)}d^2u + \frac{g''(u)g(u) - (g'(u))^2}{g^2(u)}du^2$$。

(5) $d\left[\dfrac{f(u)}{g(u)}\right] = \dfrac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}du$，

$$d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right]=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u+\left[\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}\right]'du^2$$

$$=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u+$$

$$\frac{f''(u)g^2(u)-f(u)g(u)g''(u)-2f'(u)g'(u)g(u)+2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)}du^2\text{。}$$

12.利用数学归纳法证明：

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\text{。}$$

证　当 $n=1$ 时，$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，命题成立。假设 $n\le k$ 时命题都成立。则当 $n=k+1$ 时，

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\left[(x^ke^{\frac{1}{x}})'\right]^{(k)}=\left[kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}}+x^ke^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x})'\right]^{(k)}$$

$$=k\left[x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(k)}-\left[(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}\right]'=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\right]'$$

$$=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})\right]=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}\text{，}$$

命题也成立。由数学归纳法，可知本命题对所有正整数都成立。