# 第十二章　多元函数的微分学

## 习 题　12. 1　偏导数与全微分

1．　求下列函数的偏导数：

（1）　$z = x^5 - 6x^4y^2 + y^6$；　　（2）　$z = x^2\ln(x^2+y^2)$；

（3）　$z = xy + \dfrac{x}{y}$；　　（4）　$z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$；

（5）　$z = \mathrm{e}^x(\cos y + x\sin y)$；　　（6）　$z = \tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$；

（7）　$z = \sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{y}{x}$；　　（8）　$z = (1+xy)^y$；

（9）　$z = \ln(x + \ln y)$；　　（10）　$z = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$；

（11）　$u = \mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$；　　（12）　$u = x^{\frac{y}{z}}$；

（13）　$u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；　　（14）　$u = x^{y^z}$；

（15）　$u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$，　$a_i$为常数；　（16）　$u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$，　$a_{ij} = a_{ji}$为常数。

**解**　(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 24x^3y^2$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y^5 - 12x^4y$。

(2)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^3}{x^2+y^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$。

(3)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}$。

(4)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y[\cos(xy) - \sin(2xy)]$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)]$。

(5)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + x\sin y + \sin y)$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x(x\cos y - \sin y)$。

(6)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$。

(7)　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$。

(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$。

(9) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$。

(10) 注意 $z=\arctan x+\arctan y$， $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$。

(11) $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\ e^{x(x^2+y^2+z^2)}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=2xy\ e^{x(x^2+y^2+z^2)}$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=2xz\ e^{x(x^2+y^2+z^2)}$。

(12) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}}$。

(13) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$。

(14) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$， $\frac{\partial u}{\partial z}=y^z x^{y^z}\ln x\ln y$。

(15) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,n$。

(16) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,\quad i=1,2,\cdots,n$， $\frac{\partial u}{\partial y_j}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,\quad j=1,2,\cdots,n$。

2. 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x(3,4)$ 及 $f_y(3,4)$。

解 因为 $f_x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，所以

$$f_x(3,4)=\frac{2}{5}，\quad f_y(3,4)=\frac{1}{5}。$$

3. 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，验证 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

证 由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，所以

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0。$$

4. 曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线与$x$轴的正向所夹的角度是多少？

解 以$x$为参数，曲线在点$(2,4,5)$处的切向量为$\left.(\dfrac{dx}{dx},\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx})\right|_{x=2}=(1,0,1)$，设它与$x$轴的正向所夹的角度为$\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\cdot(1,0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}，$$

所以$\theta=\dfrac{\pi}{4}$。

5. 求下列函数在指定点的全微分：

（1） $f(x,y)=3x^2y-xy^2$，在点$(1,2)$；

（2） $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$，在点$(2,4)$；

（3） $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{y^2}$，在点$(0,1)$和$\left(\dfrac{\pi}{4},2\right)$。

解 (1) 因为$df(x,y)=(6xy-y^2)dx+(3x^2-2xy)dy$，所以

$$df(1,2)=8dx-dy。$$

(2) 因为$df(x,y)=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dx+\dfrac{2y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dy$，所以

$$df(2,4)=\frac{4}{21}dx+\frac{8}{21}dy。$$

(3) 因为$df(x,y)=\dfrac{\cos x}{y^2}dx-\dfrac{2\sin x}{y^3}dy$，所以

$$df(0,1)=dx,\quad df(\frac{\pi}{4},2)=\frac{\sqrt{2}}{8}dx-\frac{\sqrt{2}}{8}dy。$$

6. 求下列函数的全微分：

（1） $z=y^x$；　　（2） $z=xy\mathrm{e}^{xy}$；

（3） $z=\dfrac{x+y}{x-y}$；　　（4） $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

（5） $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；　　（6） $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

解 (1) $dz=y^x\ln y dx+xy^{x-1}dy$ 。

(2) $dz=e^{xy}(1+xy)(ydx+xdy)$ 。

(3) $dz=-\frac{2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy$ 。

(4) $dz=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$ 。

(5) $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 。

(6) $du=\frac{2(xdx+ydy+zdz)}{x^2+y^2+z^2}$。

7. 求函数 $z=x\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。

解 由于 $\boldsymbol{v}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}=\frac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(v_1,v_2)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2y},\frac{\partial z}{\partial y}=2x\mathrm{e}^{2y}，$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial z}{\partial x}v_1+\frac{\partial z}{\partial y}v_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

8. 设 $z=x^2-xy+y^2$，求它在点 $(1,1)$ 处的沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，并指出：

（1）沿哪个方向的方向导数最大？

（2）沿哪个方向的方向导数最小？

（3）沿哪个方向的方向导数为零？

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha=(2x-y)\cos\alpha+(2y-x)\sin\alpha，$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}\Big|_{(1,1)}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin\alpha=2\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha),$$

(1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，沿 $\mathrm{v}=(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4})$，方向导数最大。

(2) 当$\alpha=\frac{5\pi}{4}$时，沿$v=(\cos\frac{5\pi}{4},\sin\frac{5\pi}{4})$，方向导数最小。

(3) 当$\alpha=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$时，沿$v=(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4})$ 或 $v=(\cos\frac{7\pi}{4},\sin\frac{7\pi}{4})$，方向导数为零。

9． 如果可微函数$f(x,y)$在点$(1,2)$处的从点$(1,2)$到点$(2,2)$方向的方向导数为 2，从点$(1,2)$到点$(1,1)$方向的方向导数为-2。求

（1）这个函数在点$(1,2)$处的梯度；

（2）点$(1,2)$处的从点$(1,2)$到点$(4,6)$方向的方向导数。

**解** $\boldsymbol{v}_1=(2,2)-(1,2)=(1,0)$，$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}_1}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 0=\frac{\partial z}{\partial x}=2$。

$\boldsymbol{v}_2=(1,1)-(1,2)=(0,-1)$，$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}_2}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(-1)=-\frac{\partial z}{\partial y}=-2$。

所以在$(1,2)$处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=2。$$

(1) $\operatorname{grad} f(1,2)=(2,2)$。

(2) 因为$(4,6)-(1,2)=(3,4)$，$\boldsymbol{v}=\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{(3,4)}{5}$，所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{4}{5}=\frac{14}{5}。$$

10. 求下列函数的梯度：

（1） $z=x^2+y^2\sin(xy)$； （2） $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$；

（3） $u=x^2+2y^2+3z^2+3xy+4yz+6x-2y-5z$，在点$(1,1,1)$。

**解** (1) $\operatorname{grad} z=(2x+y^3\cos(xy),\ 2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy))$ 。

(2) $\operatorname{grad} z=(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2})$。

(3) $\operatorname{grad} u=(2x+3y+6,4y+3x+4z-2,6z+4y-5)$， $\operatorname{grad} u(1,1,1)=(11,9,5)$。

11． 对于函数$f(x,y)=xy$，在第 I 象限（包括边界）的每一点，指出函数值增加最快的方向。

**解**　在 $(x,y)\neq(0,0)$ 点，函数值增长最快的方向为 $\text{grad}\ f=(y,x)$；

在 $(0,0)$ 点，由于梯度为零向量，不能直接从梯度得出函数值增长最快的方向。设沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 自变量的改变量为

$$\Delta x=t\cos\alpha,\ \Delta y=t\sin\alpha\ ,$$

则函数值的改变量为

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\Delta y=t^2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}t^2\sin 2\alpha\ ,$$

由此可知当 $\alpha=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ 时函数值增长最快，即函数值增长最快的方向为 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$。

12．　验证函数

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$$

在原点 $(0,0)$ 连续且可偏导，但除方向 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $-\boldsymbol{e}_i$ （$i=1,2$）外，在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

**解**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[3]{xy}=0=f(0,0)\ ,$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-0}{\Delta x}=0\ ,\quad f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-0}{\Delta y}=0\ ,$$

所以函数在原点 $(0,0)$ 连续且可偏导。取方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt[3]{t\cos\alpha\cdot t\sin\alpha}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt[3]{\sin 2\alpha}}{\sqrt[3]{2t}}\ ,$$

当 $\sin 2\alpha=0$，即 $\alpha=\frac{k\pi}{2}$ 时，极限存在且为零；当 $\sin 2\alpha\neq 0$，即 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ 时，极限不存在。所以除方向 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $-\boldsymbol{e}_i$ （$i=1,2$）外，在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

13.　验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导，但它在该点不可微。

解　由于

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \ \ ((x,y)\to(0,0)),$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)。$$

由定义，

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0}} - 0}{\Delta x} = 0，\quad f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot \Delta y}{\sqrt{0+\Delta y^2}} - 0}{\Delta y} = 0。$$

所以函数在原点$(0,0)$连续且可偏导。但

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$$

$$= f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \ne o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

所以函数在$(0,0)$不可微。

14.　验证函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

的偏导函数$f_x(x,y), f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

解　由定义，

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x^2+0^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

当$(x,y)\ne(0,0)$时，

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2\ne 0。$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x=y}} f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2}\right),$$

极限不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续。同理 $f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 也不连续。但由于

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$$

$$=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

所以函数在 $(0,0)$ 可微。

15. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点 $(0,0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在，但它在该点不连续，因而不可微。

解　函数沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha\cdot t^3}{(\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\cdot t^2)t^2}=0,\quad \forall\alpha,$$

所以函数在原点 $(0,0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在。但当 $(x,y)$ 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于 $(0,0)$ 时，极限

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky^2}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2ky^4}{k^2y^4+y^4}=\frac{2k}{k^2+1}$$

与 $k$ 有关，所以函数在原点不连续，因而不可微。

16．计算下列函数的高阶导数：

（1）$z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（2）$z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（3）$z=x\mathrm{e}^{xy}$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

(4) $u=\ln(ax+by+cz)$，求$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$；

(5) $z=(x-a)^p(y-b)^q$，求$\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q}$；

(6) $u=xyz\,\mathrm{e}^{x+y+z}$，求$\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$。

解 (1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}。$$

(2) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(1-y)\sin(x+y)+x\cos(x+y)，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(1+x)\cos(x+y)-y\sin(x+y)$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2-y)\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1-y)\cos(x+y)-(1+x)\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-y\cos(x+y)-(x+2)\sin(x+y)。$$

(3) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\mathrm{e}^{xy}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3\mathrm{e}^{xy}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2x+x^2y)e^{xy}$$

得到

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=(2+4xy+x^2y^2)e^{xy}，\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=(3x^2+x^3y)e^{xy}。$$

(4) 经计算，可依次得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{ax+by+cz}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=\frac{a}{ax+by+cz}，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{a}{(ax+by+cz)^2}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=-\frac{a^2}{(ax+by+cz)^2}，$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{2a^2}{(ax+by+cz)^3}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=\frac{2a^3}{(ax+by+cz)^3}，$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\frac{3\cdot 2a^3}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=-\frac{6a^4}{(ax+by+cz)^4}，$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=\frac{2a^2}{(ax+by+cz)^3}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y}=\frac{2a^2 b}{(ax+by+cz)^3}，$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}=-\frac{3\cdot 2a^2 b}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y}=-\frac{6a^2 b^2}{(ax+by+cz)^4}。$$

(5) $$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial^q z}{\partial y^q}\right)=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left((x-a)^p\frac{\partial^q(y-b)^q}{\partial y^q}\right)$$

$$=\frac{d^p(x-a)^p}{dx^p}\frac{d^q(y-b)^q}{dy^q}=p!q!。$$

(6) 对 $x$，$y$，$z$ 应用 Leibniz 公式，

$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^p(xe^x)}{\partial x^p}\frac{\partial^q(ye^y)}{\partial y^q}\frac{\partial^r(ze^z)}{\partial z^r}=\frac{d^p(xe^x)}{dx^p}\frac{d^q(ye^y)}{dy^q}\frac{d^r(ze^z)}{dz^r}。$$

$$=(x+p)e^x\cdot(y+q)e^y\cdot(z+r)e^z$$

$$=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}。$$

17．计算下列函数的高阶微分：

（1） $z=x\ln(xy)$，求 $\mathrm{d}^2 z$ ；

（2） $z=\sin^2(ax+by)$，求 $\mathrm{d}^3 z$ ；

（3） $u=\mathrm{e}^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$，求 $\mathrm{d}^3 u$ ；；

（4） $z=\mathrm{e}^x\sin y$，求 $\mathrm{d}^k z$。

解 (1) $dz=(\ln(xy)+1)dx+\dfrac{x}{y}dy$，

$$d^2z=\frac{1}{x}dx^2+\frac{2}{y}dxdy-\frac{x}{y^2}dy^2。$$

(2) $dz=2\sin(ax+by)\cos(ax+by)d(ax+by)=\sin 2(ax+by)(adx+bdy)$，

$$d^2z=2\cos 2(ax+by)(adx+bdy)^2，$$

$$d^3z=-4\sin 2(ax+by)(adx+bdy)^3。$$

(3) $du=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)+(2xdx+2ydy+2zdz)]$，

$$d^2u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)^2+2(2xdx+2ydy+2zdz)(dx+dy+dz)$$

$$+2dx^2+2dy^2+2dz^2]，$$

$$d^3u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)^3+6(xdx+ydy+zdz)(dx+dy+dz)^2$$

$$+6(dx^2+dy^2+dz^2)(dx+dy+dz)]$$

$$=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+6x+6)dx^3+(x^2+y^2+z^2+6y+6)dy^3$$

$$+(x^2+y^2+z^2+6z+6)dz^3]+3e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+4x+2y+2)dx^2dy$$

$$+(x^2+y^2+z^2+4y+2z+2)dy^2dz+(x^2+y^2+z^2+4z+2x+2)dz^2dx$$

$$+(x^2+y^2+z^2+2x+4y+2)dxdy^2+(x^2+y^2+z^2+2y+4z+2)dydz^2$$

$$+(x^2+y^2+z^2+2z+4x+2)dzdx^2]+6e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z)dxdydz。$$

(4) $d^kz=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})^k$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^i e^x}{\partial x^i}dx^i\cdot\frac{\partial^{k-i}\sin y}{\partial y^{k-i}}dy^{k-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}e^x\sin\left(y+\frac{k-i}{2}\pi\right)dx^idy^{k-i}。$$

18．函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}，及\quad f(0,y)=2\sin y+y^3。$$

求 $f(x,y)$ 的表达式。

解　对 $x$ 积分，得到

$$f(x,y)=x\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+g(y),$$

再将 $f(0,y)=2\sin y+y^3$ 代入上式，得到

$$g(y)=2\sin y+y^3\text{，}$$

所以

$$f(x,y)=(2-x)\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+y^3\text{。}$$

19．验证：

（1） $z=\mathrm{e}^{-kn^2x}\sin(ny)$ 满足热传导方程 $\frac{\partial z}{\partial x}=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ；

（2） $u=z\arctan\frac{x}{y}$ 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ ；

证 （1）由

$$\frac{\partial z}{\partial y}=ne^{-kn^2x}\cos(ny)\text{，}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-n^2e^{-kn^2x}\sin(ny)\text{，}$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-kn^2e^{-kn^2x}\sin(ny)=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\text{。}$$

（2）由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{yz}{x^2+y^2}\text{，}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{xz}{x^2+y^2}\text{，}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\arctan\frac{x}{y}\text{，}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\text{，}$$

得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\text{。}$$

20．设 $f(r,t)=t^{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}$，确定 $\alpha$ 使得 $f$ 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)\text{。}$$

解　将

$$\frac{\partial f}{\partial t}=(\alpha t^{\alpha-1}+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^2)e^{-\frac{r^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{1}{2}t^{\alpha-1}re^{-\frac{r^2}{4t}},\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=(-\frac{3}{2}t^{\alpha-1}r^2+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^4)e^{-\frac{r^2}{4t}},$$

代入方程，解得

$$\alpha=-\frac{3}{2}。$$

21．求下列向量值函数在指定点的导数：

（1） $\boldsymbol{f}(x)=(a\cos x,b\sin x,cx)^{\mathrm{T}}$，在 $x=\frac{\pi}{4}$ 点；

（2） $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(3x+e^y\cot z,x^3+y^2\tan z)^{\mathrm{T}}$，在 $\left(1,2,\frac{\pi}{4}\right)$ 点；

（3） $\boldsymbol{g}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)^{\mathrm{T}}$，在 $(1,\pi)$ 点。

解 (1) $\quad \boldsymbol{f}'(x)=(-a\sin x,b\cos x,c)^T$,

$$\boldsymbol{f}'(\frac{\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b,c)^{\mathrm{T}}。$$

(2) $$\boldsymbol{f}'(x,y,z)=\begin{pmatrix}3 & e^y\cot z & -e^y\csc^2 z\\ 3x^2 & 2y\tan z & y^2\sec^2 z\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}'(1,2,\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}3 & e^2 & -2e^2\\ 3 & 4 & 8\end{pmatrix}。$$

(3) $$\boldsymbol{g}'(u,v)=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}'(1,\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}。$$

22．设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为向量值函数。

（1）如果坐标分量函数 $f_1(x,y,z)=x,\ f_2(x,y,z)=y,\ f_3(x,y,z)=z$，证明 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵；

（2）写出坐标分量函数的一般形式，使 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵；

（3）如果已知 $\boldsymbol{f}$ 的导数是对角阵 $\mathrm{diag}(p(x),q(y),r(z))$，那么坐标分量函数应该具有什么样的形式？

解 （1）由于

$$f_1'(x,y,z)=(1,0,0),\quad f_2'(x,y,z)=(0,1,0),\quad f_3'(x,y,z)=(0,0,1),$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵。

(2) 由 $f_1'(x,y,z)=(1,0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 $y$，$z$ 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=x+C_1,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=y+C_2, \quad f_3(x,y,z)=z+C_3。$$

(3) 由 $f_1'(x,y,z)=(p(x),0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 $y$，$z$ 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=\int p(x)dx,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=\int q(y)dy, \quad f_3(x,y,z)=\int r(z)dz。$$