习　题　13.5　微分形式

1. 计算下列外积：

(1) $(xdx+7z^2dy)\wedge(ydx-xdy+6dz)$；

(2) $(\cos ydx+\cos xdy)\wedge(\sin ydx-\sin xdy)$；

(3) $(6dx\wedge dy+27dx\wedge dz)\wedge(dx+dy+dz)$。

解（1） $(xdx+7z^2dy)\wedge(ydx-xdy+6dz)$

$$=-(x^2+7yz^2)dx\wedge dy+42z^2dy\wedge dz-6xdz\wedge dx$$ 。

(2) $(\cos ydx+\cos xdy)\wedge(\sin ydx-\sin xdy)$

$$=-\sin(x+y)dx\wedge dy$$ 。

(3) $(6dx\wedge dy+27dx\wedge dz)\wedge(dx+dy+dz)$

$$=-21dx\wedge dy\wedge dz$$ 。

2. 设

$$\omega=a_0+a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4,$$

$$\eta=b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$$ 。

求$\omega+\eta$和$\omega\wedge\eta$。

解 $$\omega+\eta=a_0+a_1dx_1+b_1dx_1\wedge dx_2+(a_2+b_2)dx_1\wedge dx_3$$

$$+b_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+(a_3+b_4)dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$$；

$$\omega\wedge\eta=a_0b_1dx_1\wedge dx_2+a_0b_2dx_1\wedge dx_3+a_0b_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

$$+a_0b_4dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4+a_1b_4dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$$ 。

3. 求

$$\omega=x_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+(1+x_2{}^2)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_2{}^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1$$

$$+(x_3{}^2+x_2{}^2)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3-x_1{}^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2$$

的标准形式。

解

$$\omega=x_1dx_1\wedge dx_2+dx_1\wedge dx_3+(x_1^2+x_3)dx_2\wedge dx_3-(x_2^2+x_3^2)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$ 。

4. 证明外积满足分配律和结合律。

证 由外积的线性性质，只需对ω,η,σ分别是$p-$形式、$q-$形式和$r-$形式的情形证明即可。

设$\omega=\sum\limits_I f_I(x)dx_I,\eta=\sum\limits_J g_J(x)dx_J,\sigma=\sum\limits_K h_K(x)dx_K$，则

$$(\omega+\eta)\wedge\sigma=\left(\sum_I f_I(x)dx_I+\sum_J g_J(x)dx_J\right)\wedge\sum_K h_K(x)dx_K$$

$$=\sum_{I,K} f_I(x)h_K(x)dx_I\wedge dx_K+\sum_{J,K} g_J(x)h_K(x)dx_J\wedge dx_K$$

$$=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma$$ 。

$$\sigma\wedge(\omega+\eta)=\sum_K h_K(x)dx_K\wedge\left(\sum_I f_I(x)dx_I+\sum_J g_J(x)dx_J\right)$$

$$=\sum_{K,I}h_K(x)f_I(x)dx_K\wedge dx_I+\sum_{K,J}h_K(x)g_J(x)dx_K\wedge dx_J$$

$$=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta。$$

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\sigma=\left(\sum_{I,J}f_I(x)g_J(x)dx_I\wedge dx_J\right)\wedge\sum_K h_K(x)dx_K$$

$$=\sum_{I,J,K}f_I(x)g_J(x)h_K(x)dx_I\wedge dx_J\wedge dx_K$$

$$=\left(\sum_I f_I(x)dx_I\right)\wedge\left(\sum_{J,K}g_J(x)h_K(x)dx_J\wedge dx_K\right)$$

$$=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma)。$$

5. 写出微分形式 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 在下列变换下的表达式：

（1）柱面坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z\ ；$$

（2）球面坐标变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi\ 。$$

解 （1）由

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta,dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta,dz=dz\text{，}$$

得到

$$dx\wedge dy\wedge dz=rdr\wedge d\theta\wedge dz。$$

（2）由

$$dx=\sin\varphi\cos\theta dr+r\cos\varphi\cos\theta d\varphi-r\sin\varphi\sin\theta d\theta\text{，}$$

$$dy=\sin\varphi\sin\theta dr+r\cos\varphi\sin\theta d\varphi+r\sin\varphi\cos\theta d\theta\text{，}$$

$$dz=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi\text{，}$$

得到

$$dx\wedge dy\wedge dz=r^2\sin\varphi\,dr\wedge d\varphi\wedge d\theta。$$

6. 设 $\omega_j=\sum_{i=1}^n a_i^j\mathrm{d}x_i$ （$j=1,2,\cdots,n$）为 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-形式，证明

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\det(a_i^j)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n。$$

证 由于

$$x_i\wedge x_j=-x_j\wedge x_i(i,j=1,2,\cdots,n)\text{，}\quad x_i\wedge x_i=0(i=1,2,\cdots,n)\text{，}$$

所以

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\sum_{i_1,i_2,\cdots i_n=1}^n a_{i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_n}^n\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}$$

$$=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n}^n(-1)^\sigma a_{i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_n}^n\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

$$= \det(a_i^j) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$，

其中σ是排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$的逆序数。